Årg. 43:4 Dec. 1960

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

FJÄRDE HÄFTET

GUNNAR BLOM, Om spelteori och beslutsteori 229

GUNNAR HÄGG, Höger och vänster i död och levande materia 249

IVAR STÅL, Fotografiska försök som kan utföras i dagsljus 262

GUNNAR STARCK, Viktstitrering 263

Aktuellt: PER HÄGGMARK, Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning; JAN UNENGE, Fysikdagar för gymnasieelever . . . 266

Bokanmälningar: RALSTON/WILF, Mathematical Methods for Digital Computers; LAWDEN, A Course in Applied Mathematics; NIVEN/ZUCKERMAN, An Introduction to the Theory of Numbers; KAC, Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory; ROSE, A Modern Introduction to College Mathematics; GELFOND, The Solution of Equations in Integers; WILKENS, Moon Maps; PECKER/SCHATZMAN, Astrophysique générale; LINDSAY, Mechanical Radiation; Fracture, Proceedings of an International Conference on the Atomic Mechanism of Fracture; CORLIN, Revolt mot likheten; JASWON, Studies in Crystal Physics; CARROLL, The Aerodynamics of Powered Flight; KINGERY, Property Measurements at High Temperatures; Surface Effects on Spacecraft Materials; TONG, Theory of Mechanical Vibration; Crystal Growth; FRANCIS, Ionization Phenomena in Gases; RUTHERFORD, Fluid Dynamics; Ceramic Fabrication Processes; Kinetics of High-Temperature Processes; GIBSON et al, Progress in Semiconductors; Semiconductor Abstracts, Vol. V; GRABBE et al, Handbook of Automation, Computation and Control; KATRITZKY/LAGOWSKI, Heterocyclic Chemistry; GUERIN, La grande industrie chimique de base; PRYTZ/ØSTERUD, Uorganisk kjemi 268

Problemavdelning:
Matematiska uppgifter (red. av S. BÅGMAN) 287
Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentexamen nov. 1960 290
Realexamen h.t. 1960. Provräkningar 297
Praktisk realexamen h.t. 1960. Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära 299

Författare i detta häfte (omslaget); Insänd litteratur (annonsbladet vid sid. 244).

Annonsörer: Rudolph Grave; Lindståhls Bokhandel; Norstedt & Söner; Svenska Bokförlaget; Svenska Radio AB.

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 16:50, pr häfte kr. 4:50. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Red. och utgivare: fil. dr C. E. Blom, Karlbergsv. 16, Stockholm.

Tidigare årg. Förfråga Eder direkt hos red. Av årg. 1—13 är flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14 (1931) t.o.m. 34 (1951) kr. 10:—, för årg. 35—38 kr. 12:50, för årg. 39—42 kr. 15:— och för årg. 43 kr. 16:50.

Pärmar av grön klot à 3:50; varje pärm avsedd för två årg.

Problemhäften för 1957, 1958, 1959, 1960 à 2:40. 1956 års häfte slutsålt. Tidigare häften à 1:40. Innehåll: Student- o. realex.-uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.

Övriga särtryck: se junihäftet.

Problemhäften och övriga särtryck sändes pr korsband (porto 15 öre per häfte) om inbetalning sker till postgiro 527 55, Elementa, Karlbergsvägen 16, Stockholm.

Att beakta

Prenumerationsavgiften för 1961 är kr. 16:50. Var god prenumerera tidigt, helst före årsskiftet; marshäftet erhålles då säkert vid första utsändningen omedelbart efter tryckningen. Observera bilagt inbetalningskort till privata abonnenter. Till bibliotek, skolor, m. fl., har fakturor utsänts 22 nov. 1960.

Studerande vid universitet och högskolor erhåller tidskriften för kr. 14:— vid direkt prenumeration hos red., varvid hänvisning göres till studentkatalog. Se bifogat inbetalningskort.

Problemhäfte 1960 à 2:40 har utkommit.

Allmänt omvittnat

är att en avsevärd del av innehållet i Elementa — icke minst i äldre årg. — är av bestående värde. En Elementaserie är därför en beaktansvärd tillgång. En komplett dylik är svår att uppbringa, men ännu finns alla årg. fr. o. m. årg. 14. Lagret tunnas emellertid ut med varje år som går. Försumma därför ej att nu skaffa Er en så fullständig samling som möjligt.

Denna uppmaning riktas särskilt till bibliotekarierna vid de många skolor, läroverk av skilda slag och offentliga bibliotek vilka tillkommit som abonnenter under senare år. — Priser å äldre årgångar och pärmar för inbindning se ovan.

Författare i detta häfte: docent G. Blom, Lund; tekn. dr K. B. Broberg, Upplands-Väsby; lektor B. Englund, Uppsala; lektor B. Grundström, Djursholm; lektor O. Hemer, Linköping; civiling. S. Herlitz, Uppsala; dr M. Hillert, Stockholm; laborator S. Hjalmars, Stockholm; civiling. F. Hjelte, Stockholm; professor G. Hägg, Uppsala; lektor P. Häggmark, Göteborg; observator G. Larsson-Leander, Lund; fil. lic. D. Lundqvist, Stockholm; civiling. G. Markesjö, Stockholm; civiling. B. Mårtensson, Linköping; professor F. Odqvist, Stockholm; fil. lic. H. Riesel, Stockholm; civiling. J. Rosén, Stockholm; lektor L. Råde, Göteborg; docent J. Sandström, Lund; lektor G. Starck, Stockholm; lärov.adj. I. Stål, Saltsjöbaden; adj. J. Unenge, Solna; lektor A. Wahlgren, Stockholm; docent H. U. Åström, Stockholm; civiling. K. J. Åström, Stockholm.

Bilagor: Lindståhls Bokhandel; Elementa inbetalningskort.

Storföretag är eniga om AVO

Pris Kr 285:—
Beredskapsväska Kr 40:—

AVOMETER MODELL HD är det rätta instrumentet för varje starkströmstekniker. Det mäter lik- och växelspänning, lik- och växelström samt resistans inom 18 områden. AVO HD har automatiskt verkande överbelastningsskydd och är av så robust konstruktion att det tål alla rimliga elektriska och mekaniska påfrestningar. AVO HD är alltid "körklar".

Begär prospekt med närmare uppgifter om AVO HD och övriga AVO-instrument.

Vi levererar till bl.a. följande företag:

AB Addo
AB Atomenergi
AB Stockholms Spårvägar
AB Svenska Metallverken
AB Bofors
ASEA
Kockums Mek. Verkstads AB
LKAB
LME
SAAB
Standard Radio och Telefon AB
Svenska AB Trådlös Telegrafi
Svenska Flygmotor AB
T.G.O.J.
Uddeholms AB

och dessutom till:

Försvarets Myndigheter
Kungl. Telestyrelsen
Kungl. Vattenfallsstyrelsen
Statens Järnvägar
Uppsala Universitet
Lunds Universitet
Kungl. Tekniska Högskolan
Chalmers Tekniska Högskola
Högre Tekniska Läroverk
Kungl. Överstyrelsen för yrkesutbildning

AVOMETER MOD. 8, 20000 Ω/V. 28 mätomr., växelström. Det rätta instrumentet för den anspråksfulle teleteknikern. Kr 425:-

AVO MULTIMINOR MOD. 1, 10000 Ω/V. 19 mätområden. Det rätta universalinstrumentet i fickformat för varje serviceman. Kr 95:-

AVO TRANSISTOR ANALYSER MOD. TA för likströmsmässig mätning av I_{cEo} och B samt dyn.mätn. av β o. brusfaktor med hjälp av referensoscillator. Kr 1 250:-

AVO RÖRMÄT. BRYGGA MOD. V/4 mäter "konditioner" hos alla standardrör och upptar deras karakteristikor. Kr 1 250:-

SRA **SVENSKA RADIOAKTIEBOLAGET**

Alströmergatan 14, Stockholm 12. Tel. 22 31 40
Filialer i Göteborg, Malmö Norrköping, Sundsvall, Örebro.

STORT

DEMONSTRATIONSINSTRUMENT

från

LEYBOLD

Lik- och växelspänning

3 V	100 V
10 V	300 V
30 V	600 V

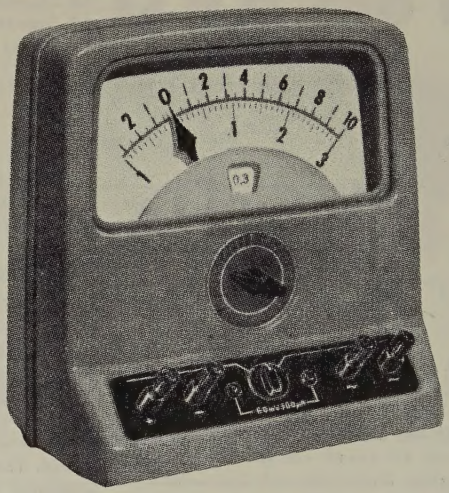
Lägsta avläsbara värde 100 mV

Lik- och växelström

0,001 A	0,1 A
0,003 A	0,3 A
0,01 A	1 A
0,03 A	6 A

Lägsta avläsbara värde 10 μA

För likström finns dessutom mätområdena 300 μA respektive 60 mV fullutslag.



Känslighet: Likspänning 1000 ohm/V
Växelspänning 1000 ohm/V med undantag för områdena 3 och 10V, där känsligheten är 100 ohm/V.

främst för laboratoriet —

RUDOLPH GRAVE AB

ETABLERAD 1874

Stockholm Tel 23 37 80 Göteborg Tel 27 51 35 Malmö Tel 381 25

Om spelteori och beslutsteori

Av docent Gunnar Blom, Lund

1. Inledning och översikt

»Arma gubbe! Varför spela?
Kan det smärtorna fördela?»
Erik Johan Stagnelius.

1.1. Syfte

Syftet med denna uppsats är att ge en elementär framställning av några grundtankar i spelteorien och beslutsteorien. Någon fullständighet eftersträvas inte, och även flera grundläggande frågor kommer inte att beröras. De båda teorierna framställs ibland oberoende av varandra. Det skall här göras ett försök att behandla dem ur gemensamma synvinklar. Spelteorien och beslutsteorien är nämligen rätt nära släkt och har samma mål, nämligen att ange principer för hur beslut skall fattas.

Beträffande förkunskaper förutsätts i avd. 1—3 förtrogenhet med enkla matematiska resonemang och med sannolikhetsbegreppet. I avd. 4 förutsätts större vana vid matematisk-statistiska härledningar.

Uppsatsen är så disponerad att dess fyra avdelningar till stora delar kan läsas oberoende av varandra. Avd. 3 har på grund av uppsatsens längd uppdelats i två avsnitt; avd. 3 b och 4 publiceras i ett följande häfte.

1.2. Historik

Spelteorien är i stor utsträckning en enda mans verk. I en uppsats från 1928 [6] lade den ungerskfödde, i USA verksamme matematikern John von Neumann (1903—1957) grunden till teorien. En del av dess grundtankar kan dock spåras redan i arbeten av fransmannen Borel från början av 1920-talet. Spelteorien var till en början föga uppmärksammad, och först när von Neumann tillsammans med ekonomen Morgenstern publicerade det stora verket Theory of games and economic behavior [7] blev den mer allmänt känd. Resultaten väckte livligt intresse såväl bland teoretiker som praktiker. Under 1950-talet har matematiker såsom Gale, Karlin, Kuhn, Nash, Shapley och Tucker

John von Neumann — spelteoriens skapare.

vidareutvecklat spelteoriens idéer. En stor skara ekonomer, matematiker, militärer, statistiker, etc. har med växlande framgång sökt tillämpa den på en mångfald praktiska problem.

För den som vill orientera sig i ämnet hänvisas till litteraturförteckningen som upptar böcker för olika smakriktningar. Boken av Williams [12] är i bästa mening populär, medan McKinseys arbete [8] är väl lämpat för den som föredrager en mera teoretisk framställning. Arbetet av Luce och Raiffa [5] innehåller en mycket stimulerande diskussion av spelteoriens idéer.

Beslutsteorien har också huvudsakligen en enda upphovsman, statistikern Abraham Wald (1902–1950), född i Rumänien och verksam i USA. Wald arbetade under andra världskriget med beslutsproblem inom den statistiska kvalitetskontrollen. Resultaten föranledde honom att utarbeta en teori avsedd att täcka mycket allmänna beslutsituationer. Beslutsteorien framlades i slutet av 1940-talet i ett antal uppsatser samt mer definitivt i bokform [11]. Teoriens tillkomst torde komma att betraktas som en mycket viktig händelse i statistikens historia. Walds forskningar har fortsatts av Blackwell, Savage, Wolfowitz, m. fl., men fortfarande är Walds bok grundläggande. Den är mycket svårläst, och den som söker en lättillgängligare publikation hänvisas till Chernoff och Moses [3]. En populär introduktion till de nya idéerna har utgivits av Bross [2].

1.3. Allmänt om beslut

Det framhölls inledningsvis att spelteori och beslutsteori behandlar principer för hur beslut bör fattas. Innan vi närmare beskriver vad detta innebär, skall vi välja en mycket allmän utgångspunkt.

Människan står ständigt i valsituationer och måste fatta beslut. Hon kommer till vägskäl och måste välja mellan vägarna utan att säkert veta vart de leder. Betydelsen av besluten kan vara växlande. Skall jag ta bilen eller spårvagnen till arbetet i vintervädret? Skall jag flytta dambonden eller löparen? Skall jag lägga ner textilfabriken

och beröva tusen arbetare deras inkomst? Skall vi satsa en halv miljard på en projektil till Mars?

Finns det något gemensamt i den enorma mängd av beslut som fattas av individer och organisationer? Åtminstone ett drag kan urskiljas. Låt oss av skäl, som senare skall framkomma, kalla den som fattar beslutet för *spelare* och beteckna honom A. I överensstämmelse härmed skall vi kalla den beslutsituation som A befinner sig i för ett *spel*. Vi kan då konstatera följande.

1. Spelaren A har ett antal handlingsalternativ att välja mellan.

Dessa alternativ betecknas $a_1, a_2, \ldots, a_m$ och kallas A:s *strategier*. Talet m är minst 2 men kan vara 10 000 eller rent av oändligt stort.

Abraham Wald — beslutsteoriens skapare.

För att kunna ställa upp en teori måste vi göra ytterligare ett antagande, som begränsar mängden av beslutsituationer åtskilligt (men ändå lämnar många kvar).

2. Konsekvensen av varje beslut kan mätas.

Vi antar att det finns tal $M(1), M(2), \ldots, M(m)$ som mäter den »nytta» som spelaren A har av att välja resp. $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Vi utgår också ifrån att spelaren bara tänker på sig själv, dvs. vill handla så att nyttan för honom själv blir så stor som möjligt.

Beträffande talen $M(i)$ finns det två möjligheter. En möjlighet är att talen är kända för spelaren innan han fattar sitt beslut. Då är situationen enkel. A väljer då det beslut som ger honom största möjliga nytta. En annan möjlighet är att nyttan inte är på förhand känd, och det är en vanligare situation. I de förut ställda frågorna kan ju konsekvensen av beslutet vara beroende av halkan på gatan, av motspelarens intelligens, av den kommande tidens textilimport från Italien eller av aktiviteten bakom järnridån. Sådana faktorer vet kanske A inte så mycket om — förrän efteråt.

Låt oss för enkelhets skull kalla alla de omständigheter som påverkar konsekvensen av ett beslut för B. Denna allmänna faktor B kan utfalla på ett antal olika sätt som vi kallar *händelser* och betecknar $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Nyttan $M(i)$ är beroende av hur B utfaller, dvs. av det alternativ β_j som sedermera visar sig inträffa.

Vi måste därför gå ett steg längre och ersätta varje tal $M(i)$ med en serie tal $M(i,1)$, $M(i,2)$, ..., $M(i,n)$, där $M(i,j)$ är den nytta som spelaren A får av beslutet α_i om alternativet β_j inträffar. När det sades att konsekvensen av varje beslut kan mätas, menas alltså därmed att samtliga tal $M(i,j)$ är på förhand kända. Det är bekvämt att ställa upp dem i form av en matris

$$M = \begin{bmatrix} M(1,1) & M(1,2) & \dots & M(1,n) \\ M(2,1) & M(2,2) & \dots & M(2,n) \\ \hline M(m,1) & M(m,2) & \dots & M(m,n) \end{bmatrix}$$

Ofta är det lämpligt att tänka sig att nyttan $M(i,j)$ är ett *belopp* som A får, om han väljer α_i, och β_j inträffar. I fortsättningen kommer vi mestadels att välja en sådan terminologi. Av samma skäl kallas M *betalningsmatrisen.*

Det bör tilläggas att $M(i,j)$ ibland verkligen är ett belopp, t. ex. om A vistas i Monte Carlo eller är chef för ett affärsföretag, men det behöver inte vara så. Det kan tänkas att $M(i,j)$ är sänkningen av A:s blodtryck eller antalet soliga dagar under hans semester.

Det är också ofta praktiskt att kalla även den okända faktorn B för en spelare. I så fall är det logiskt att kalla händelserna β_1, ..., β_n B:s strategier. I vissa fall, som vi skall ägna uppmärksamhet åt, är verkligen B en person av kött och blod; B kan t. ex. sitta mitt emot A vid spelbordet, vara A:s argaste konkurrent om professorsstolen eller chef för en fientlig styrka som önskar ta kål på A. I andra situationer är B en beteckning för vad Wald kallar *Naturen.* Det är då B som ordnar att det blir halt på gatan eller bestämmer vilken av två vetenskapliga hypoteser som är den rätta. Det kan verka långsökt att i sådana fall kalla B för en spelare — han är då kanske bara en symbol för A:s okunnighet — men benämningen ger en både pittoresk och bekväm terminologi som täcker de situationer som intresserar oss. (Vi skall i avd. 4 tillåta oss att låta spelarna byta namn, så att i stället A får vara Naturen och B t.ex. en statistiker som vill komma underfund med Naturens hemligheter; tills vidare skall vi emellertid undvika sådana namnbyten.)

Ett spel kan nu beskrivas på följande sätt. A väljer en strategi α_i och B väljer en strategi β_j. Beloppet $M(i,j)$ utbetalas därefter till A.

Vanligen utför spelarna sina val oberoende av varandra. Vi skall emellertid ibland tillåta olika former av *spioneri,* t. ex. att B känner A:s val, innan han gör sitt. Spionerireglerna beror på de närmare omständigheterna och kan inte preciseras på detta stadium. Det är också väsentligt att veta om spelet utföres en enda gång, eller om A och B är så passionerade att de utför långa serier av spel.

Låt oss göra ett väsentligt påpekande: i denna uppsats antages att antalet möjliga strategier, dvs. m och n, båda är *ändliga.*

1.4. Tre typer av spel

Det finns åtminstone tre speltyper som A och B kan ägna sig åt. Dessa typer, som inte är strängt åtskilda, täcker tillsammans många spel- och beslutsituationer:

1. Spel med kända risker. 2. Strategiska spel. 3. Spel mot Naturen.

Den första typen har varit känd sedan sannolikhetskalkylens födelse på 1500- och 1600-talet, ehuru beteckningen är ny. Det har ansetts lämpligt att här diskutera denna speltyp separat (ehuru man om man önskar kan betrakta den som specialfall av någon av de andra). Andra och tredje speltypen har först sedan spelteoriens och beslutsteoriens tillkomst blivit föremål för systematiskt studium. Det kan redan nu vara värt att framhålla, att de båda första typerna kan behandlas ganska tillfredsställande. Däremot är teorien för den tredje typen ännu ofullgången — utom i de lyckliga fall då spelet kan återföras på de båda andra typerna. Att denna teori inte är så fullständig är inte förvånande. Naturen är ofta en okänd motståndare, vars spelvanor inte är lätta att komma underfund med.

Som orientering skall ett exempel ges på var och en av de tre speltyperna. Resonemangen kring exemplen innehåller flera av spel- och beslutsteoriens grundläggande idéer. Senare skall dessa idéer diskuteras mer ingående och kompletteras med andra.

Ex. 1. Spel med kända risker. Lotteriet

A funderar på att köpa en lott för 2 kr. i ett lotteri där vinsterna utgöres av tio bilar, värda 10 000 kr. var. Han har två strategier att välja emellan: α_1=köpa lott; α_2=ej köpa lott. »Motspelaren» B, fru Fortuna, har också två strategier: β_1=A vinner en bil; β_2=A vinner ej en bil.

Om $M(i, j)$ är nettovinsten på affären i kronor räknat, erhålles betalningsmatrisen

$$M = \begin{bmatrix} 9998 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Som framgår av den förut givna definitionen på en betalningsmatris, är 9998 det belopp som A får om han väljer α_1 och B väljer β_1, osv.

Om A är rationell, tar han reda på hur många lotter det finns i lotteriet; antag att antalet är 100 000. Han kan då räkna ut medelvärdet av sin vinst, under förutsättning att han väljer α_1. Detta medelvärde blir

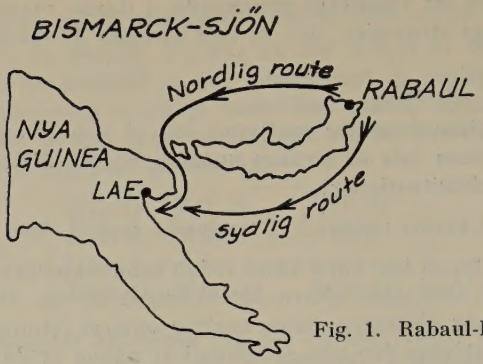


Fig. 1. Rabaul-konvojen.

$$\frac{10}{100\,000} \cdot 9998 + \frac{99\,990}{100\,000} \cdot (-2) \approx -1.$$

Väljer han α_2, blir vinsten givetvis 0.

Låt oss tänka oss att A anser dessa värden representera den nytta han har av spelet. Vi har då tydligen befriat oss från talen $M(i, j)$ och kan sätta $M(1) \approx -1$ och $M(2) = 0$. Den största nyttan av spelet får alltså A genom att välja α_2, dvs. inte spela alls!

Det är inte självklart att A önskar beräkna nyttan på detta sätt. Han kan t. ex. anse att det är spännande att spela och att nöjet är värt låt oss säga 3 kr., alldeles oavsett om han vinner eller ej. I så fall ökar $M(1)$ till $+2$ kr., och A bör givetvis köpa en lott. Många andra värderingsprinciper är tänkbara, beroende på spelarens förmögenhetsförhållanden, skattemoral, etc.

Ex. 2a. Strategiskt spel. Rabaul-konvojen[1]

Detta spel ägde rum vid Nya Guinea under andra världskriget. A var den amerikanske generalen Kenney, B en japansk befälhavare som skulle föra en konvoj från Rabaul till Lae (se Fig. 1). Den ursprungliga versionen av händelseförloppet har dock ändrats något.

B hade två alternativ att välja emellan: β_1=nordlig route; β_2=sydlig route. A hade ont om spaningsflyg och hade också två alternativ: α_1=spana mest längs nordlig route; α_2=spana mest längs sydlig route. Väderleksförutsägelserna löd: regn och dålig sikt i norr, klart väder i söder. Tre dagar beräknades för förflyttningen av konvojen.

Om A valde α_1 och B valde β_1, skulle antalet »bombdagar» troligen bli två, ty en dag skulle gå åt innan A fann konvojen. Om A valde α_1

[1] Se Journ. Op. Res. Soc. Am. **2**, 1954, 365.

och B valde β_2, kunde man räkna med två och en halv dag, ty en halv dag skulle gå åt innan de fåtaliga maskinerna i söder fann konvojen. Om A valde α_2 och B valde β_1, kunde det beräknas bli en enda bombdag, ty det skulle dröja innan spaningen koncentrerades norrut. Om slutligen A valde α_2 och B valde β_2, skulle effekten bli maximal, dvs. tre bombdagar. Om »beloppet» $M(i, j)$ är antalet bombdagar, blir alltså betalningsmatrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 2{,}5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hur bör A och B handla, om ingen förutsättes kunna spionera på den andre? Deras intressen är tydligen diametralt motsatta. Låt oss först betrakta situationen ur A:s synvinkel. Om A väljer α_1, får han minst beloppet 2; om han väljer α_2 får han minst 1. Det största av dessa minimivärden är 2; dvs. genom att välja α_1 får A minst 2, möjligen mer. B ser saken ur sin synvinkel. Väljer han β_1 kan resultatet i värsta fall bli 2, och tar han β_2 kan det i sämsta fall bli 3. Det minsta av dessa tal är 2. Alltså: om A väljer α_1, blir antalet bombdagar minst 2; om B väljer β_1, blir antalet högst 2. Uppenbarligen är strategierna α_1 och β_1 optimala för spelarna, dvs. B bör välja nordlig route och A bör rekognosera över detta område.

Man bör observera att det är väsentligt för A (och för B) att veta, att han har att göra med en beräknande motståndare, som bara ser till sitt eget bästa. Om A, t. ex. på grund av spioneri, skulle få veta att B av någon anledning tänkt välja β_2, skulle han givetvis välja α_2 och inte α_1.

Den handlingsprincip som här följts brukar kallas *maximinprincipen.*

Ex. 3. Spel mot Naturen. Experiment eller ej?

A har en kemisk fabrik och har fått beställning på en viss kvantitet av en produkt. Han kan tillverka denna kvantitet enligt en standardmetod S_1 eller enligt en ny metod S_2, som möjligen ger bättre ekonomiskt utbyte. Om A väljer S_1, vet han att vinsten på affären blir ca 50 000 kr. Om han väljer S_2, är han inte säker på hur det går; han förstår dock, att det grovt räknat finns tre möjligheter: (1) att han får 50 0000 kr. bättre resultat, (2) att han får samma resultat, (3) att han får 25 000 kr. sämre resultat än med S_1.

I denna situation föreslår laboratoriechefen att man skall utföra ett jämförande försök mellan S_1 och S_2. Försöket skall planeras så, att man med stor säkerhet kan avgöra vilket av de tre alternativen som är det riktiga. Tyvärr kostar detta försök 10 000 kr. A har alltså tre möjligheter:

α_1=direkt välja S_1
α_2=direkt välja S_2
α_3=utföra försöket och välja den gynnsammaste metoden.

Motståndaren B, som är Naturen, har också tre möjligheter i beredskap:

β_1=S_2 ger bättre resultat än S_1
β_2=S_1 och S_2 ger samma resultat
β_3=S_2 ger sämre resultat än S_1.

Betalningsmatrisen blir (i tusen kr.):

$$\begin{bmatrix} 50 & 50 & 50 \\ 100 & 50 & 25 \\ 90 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

Hur skall A handla? Om han kunde dra nytta av försöket för andra ändamål skulle han kanske välja α_3, men vi skall anta att så inte är fallet; m. a. o. spelet mot Naturen utföres bara en enda gång. Om A har en viss uppfattning om Naturens strategi, åtminstone så mycket att han kan säga hur sannolika alternativen β_1, β_2 och β_3 är, blir hans situation relativt enkel. Han kan då föra samma resonemang som i Ex. 1. Om han t. ex. tror att alternativen kommer att inträffa med sannolikheterna 0,60, 0,20 och 0,20,[1] kan han räkna ut sin medelvinst $M(i)$ av strategien α_i. Han finner då efter en enkel beräkning $M(1)=50$; $M(2)=75$; $M(3)=70$. Det bästa för honom är alltså då att välja α_2, dvs. att använda den nya metoden direkt, men det är nästan lika bra att välja α_3, dvs. att utföra experimentet.

Om A inte alls vet hur det kan komma att gå, är hans situation värre. Är han en försiktig man, kan han tillämpa maximin-resonemanget från Ex. 2 a. Han undersöker då hur det i sämsta fall kan gå, om han väljer ett visst alternativ, dvs. han bestämmer minimum för talen i varje rad i betalningsmatrisen. Dessa minima blir uppifrån räknat 50, 25 och 40. Det största av dessa tal är 50, och han väljer alltså α_1, dvs. den gamla metoden. Det är uppenbart att sådana överläggningar inte kan främja det industriella framåtskridandet! Detta hindrar inte att A:s ekonomiska situation kan vara sådan att försiktighet är en dygd.

Det är intressant att lägga märke till att, medan maximin-principen var den enda rätta att begagna i Ex. 2 a, anger den nu bara en utväg bland många. Orsaken härtill är uppenbarligen att generalen i Ex. 2 a spelade mot en, som han antog, intelligent motståndare, medan fabriksägaren spelar mot den okända motspelaren Naturen.

[1] Han kan t. ex. ha frågat tio förståndiga män, av vilka sex uttalat sig för S_2, etc.

2. Spel med kända risker

»Jag hoppas på slumpen och tror på dess goda smak.»
Hjalmar Bergman, Markurells i Wadköping.

2.1. Allmän beskrivning

Redan Ex. 1 ger trots sin enkelhet upplysning om hur man kan spela ett spel med kända risker. Vi skall nu systematisera iakttagelserna och ge några kommentarer och ytterligare exempel.

Spelaren A har strategierna $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ och spelaren B strategierna $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Om A väljer α_i och B väljer β_j, får A beloppet $M(i, j)$. Beloppen $M(i, j)$ bildar tillsammans betalningsmatrisen M. Förutom denna matris känner spelarna en *riskmatris*

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2n} \\ - & - & - & - \\ w_{m1} & w_{m2} & \ldots & w_{mn} \end{bmatrix}$$

Talen w_{ij} är sannolikheter, och i varje vågrät rad är summan av dessa lika med 1. Talen i en sådan rad kallas tillsammans en *sannolikhetsvektor*.

Spelet tillgår så att A först väljer en lämplig strategi α_i. B tillåtes att spionera på A och vet alltså vilken strategi A har valt. Därefter väljer B med slumpens hjälp en strategi β_j. Vid lottdragningen använder han sig av talen i den i:te raden i riskmatrisen, dvs. sannolikheterna $w_{i1}, \ldots, w_{in}$. Han väljer m. a. o. strategien β_1 med sannolikheten w_{i1}, strategien β_2 med sannolikheten w_{i2}, etc.

Hur B utför detta val på ett praktiskt sätt är en särskild fråga, som vi inte skall spilla många ord på. Om han t. ex. har fyra strategier att välja emellan och sannolikheterna är t. ex. 0,4, 0,3, 0,2 och 0,1, kan han ta sin hatt, lägga fyra lappar märkta »1», tre lappar märkta »2», osv. i den, blanda ordentligt och sedan dra en lapp på måfå. (Han kan även använda en tabell över slumptal eller låta en matematikmaskin fabricera sådana.)

När en spelare på detta sätt låter en sannolikhetsvektor avgöra valet av strategi, säges han begagna en *blandad strategi*. Detta är ett viktigt begrepp inom spelteorien och beslutsteorien. Sedan denna term införts, kan det vara befogat att också sätta ett adjektiv före de givna strategierna $\beta_1, \ldots, \beta_n$. När B väljer en av dessa (utan slumpförfarande), säges han begagna en *ren strategi*. Som vi senare skall se, kan även spelaren A ibland ha glädje av blandade strategier, dock inte i denna form av spel.

Läsaren kan av våra formuleringar möjligen få det intrycket att B i detta spel alltid är en tänkande varelse. Så behöver emellertid inte vara och är vanligen inte fallet, vilket f. ö. redan Ex. 1 visade.

2.2. Val av strategi

Vi skall nu hjälpa A att välja strategi. Om han väljer t. ex. a_i, vet han inte säkert hur det går; det hänger på resultatet av B:s lottdragning vilket av beloppen $M(i, 1), \ldots, M(i, n)$ som han kommer att få. Vid strategivalet kan han resonera på olika sätt. Vi skall diskutera två möjligheter.

(a) Medeltalsprincipen

Inför beteckningen

$$M(i)=\sum_{j=1}^{n} w_{ij} M(i, j)$$

Detta är tydligen vad A får i medeltal om han väljer a_i. Om han anser att detta representerar den nytta han har av spelet, är, som vi redan sett i Ex. 1, strategivalet enkelt. A har då bara att välja den strategi som gör $M(i)$ så stort som möjligt.

(b) Riskbegränsningsprincipen

Låt X vara det belopp som utbetalas till A efter spelets slut. A vet inte på förhand hur stort det blir. Om något eller flera av talen i betalningsmatrisen är stora negativa tal, kan han rent av riskera att bli ruinerad, och det är rimligt att han vill gardera sig mot en sådan fatalitet. Låt oss antaga att A för den skull väljer ett tal X_0, som anger den vinstgräns som han helst inte vill underskrida. Några garantier härför kan han naturligtvis inte få (utom om X_0 väljes mycket lågt), men han kan välja en sannolikhet q_0, som anger den maximala risk han är beredd att stå för att komma på fel sida om gränsen. Han vill m. a. o. tillse att

$$P(X<X_0)\leqq q_0$$

dvs. att sannolikheten att $X<X_0$ är högst q_0. Risken q_0 kan väljas lika med 0,01, 0,001 eller ännu mindre, beroende på A:s motvilja mot att ta risker.

Vid strategivalet förkastas alla a_i som inte uppfyller detta villkor. Hur skall sedan valet ske bland de återstående strategierna? Rätt rimligt är att A väljer den strategi som med föreskriven sannolikhet p_1 (t. ex. 0,80, 0,90 eller ännu mer) ger honom största möjliga vinst, eller mer precist uttryckt: att han väljer den strategi som gör talet x i olikheten

$$P(X \geqq x) \geqq p_1$$

så stort som det överhuvud taget går att åstadkomma. I detta fall säges A handla enligt *riskbegränsningsprincipen.* Fördelen med denna är att A skyddar sig mot stora förluster. Dock måste han stå en viss risk q_0 som inte bör väljas onormalt låg, ty han kan då komma att utmönstra strategier som med stor sannolikhet skulle ge en ansenlig vinst. Av samma skäl bör p_1 inte väljas för högt.

En nackdel med riskbegränsningsprincipen är att de erforderliga numeriska beräkningarna kan bli betungande. Det är intressant att notera att de uppkommande problemen är besläktade med de klassiska ruinproblemen inom sannolikhetskalkylen (se härom t. ex. Feller, An introduction to probability theory and its applications. New York, 1957).

2.3. Två exempel

Ex. 4. Vilken affär?

A äger 25 000 kr. Han väljer mellan två affärer. Affär 1 ger honom med 99 % chans en vinst på 100 000 kr. och med 1 % chans en förlust på 50 000 kr. Affär 2 ger honom en säker vinst på 5 000 kr. A har alltså två handlingsalternativ α_1 och α_2 motsvarande de båda affärerna. B (som vi t. ex. kan låta vara Merkurius, köpmännens gud) har också två alternativ: β_1=affär i ger vinst; β_2=affär i ger förlust (i=1, 2).

Betalningsmatrisen M och riskmatrisen W blir

$$M = \begin{bmatrix} 100\,000 & -50\,000 \\ 5\,000 & — \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Låt oss först tillämpa medeltalsprincipen. Om A väljer α_1 tjänar han i medeltal

$$0{,}99 \cdot 100\,000 + 0{,}01 \cdot (-50\,000) = 98\,500$$

medan α_2 ger honom 5 000. Affär 1 är alltså fördelaktigast.

Kommentarerna ger sig själva. Kan A förbise, att han, om han väljer α_1, löper en risk på 0,01 att bli skuldsatt? Det förefaller mer välbetänkt att tillämpa riskbegränsningsprincipen. Antag att A väljer $X_0 = -25\,000$ samt $q_0 = 0{,}001$, vilket innebär att sannolikheten att hans kapital blir negativt skall vara högst 0,001. Han måste då förkasta α_1 och välja det tryggare men tyvärr föga givande α_2. (Det är likgiltigt hur p_1 väljes i detta fall.)

Det är intressant att lägga märke till att strategivalet kan påverkas av om spelet har engångskaraktär eller ej. Antag t. ex. att A finge möjlighet att spela ovan beskrivna spel låt oss säga tio gånger i följd med fritt val varje gång mellan alternativen (dock med det naturliga förbehållet att han måste avbryta sitt spelande om hans kapital

till äventyrs skulle bli negativt under spelets lopp). Han skulle då känna sig betydligt angenämare till mods än förut. Antag att han även då skulle tillämpa riskbegränsningsprincipen med $X_0 = -25\,000$, $q_0 = 0{,}001$ och $p_1 = 0{,}90$. Det bästa för honom är i så fall att välja α_2 fem gånger i följd och därefter α_1 fem gånger i följd. Med en sannolikhet av $0{,}99^5 \approx 0{,}95$ kommer då hans kapital att växa till 550 000 kr., medan risken att han blir skuldsatt håller sig under 0,001.

Exemplet visar att det inte är självklart hur man skall beräkna den nytta som en spelare har av ett spel med kända risker. Två omständigheter är tydligen viktiga för strategivalet, nämligen spelarnas begynnelsekapital samt antalet spel. Svårigheten vid valet ovan berodde ju på att spelaren hade ett begränsat kapital som han löpte risk att förlora, om han bar sig oskickligt åt eller hade otur. Betydligt enklare blir diskussionen, såvida utgångskapitalet är tillräckligt stort i förhållande till det belopp som betalas ut i varje spel och dessutom antalet spel är stort. I det långa loppet kommer då spelaren att i medeltal få beloppet $M(i)$ per spel (om han väljer α_i), och han kan lugnt förlita sig på medelvärdesprincipen vid sina nyttofunderingar. Vi skall ge ett sådant exempel, som ehuru förenklat är representativt för de industriella beslutsproblem som uppträder inom den statistiska kvalitetskontrollen.

Ex. 5. Ekonomisk kvalitetskontroll

A är en industri som tar emot en viss detalj från en leverantör B. Detaljen som ingår i en av A tillverkad apparat är ibland felaktig. Detta upptäckes när A slutsynar apparaten, men det är kostsamt att då byta ut detaljen mot en felfri. A funderar därför på att införa en särskild mottagningskontroll, men han vet inte om det lönar sig. Frågan är också hur många detaljer han i så fall skulle kontrollera. Han nöjer sig vid sin utredning med att jämföra följande tre alternativ:

α_1 = ingen mottagningskontroll
α_2 = allkontroll, dvs. kontroll av varje detalj
α_3 = kontroll av 20 slumpmässigt utvalda detaljer i varje parti om 1000 detaljer. Partiet godkännes om ingen felaktig påträffas; annars kontrolleras hela partiet.

Kontrollkostnaden är 1 kr. per enhet. Felkostnaden, dvs. kostnaden att vid slutsyningen byta ut en felaktig detalj mot en ny, är 50 kr.

För att kunna välja strategi måste A också veta hur ofta det händer att B levererar dåliga partier. En statistisk undersökning av äldre partier har visat att ca 80 % av alla partier är relativt bra, ty de har ca 10 felaktiga per parti om 1000. Återstoden, 20 % av partierna,

har ca 50 felaktiga per parti, vilket inte är bra. De goda och dåliga partierna är blandade slumpmässigt om varandra. Leverantören B har alltså två »strategier»:

$$\beta_1 = 10 \text{ felaktiga per parti}$$
$$\beta_2 = 50 \text{ felaktiga per parti.}$$

Betalningsmatrisen blir per parti räknat, om vi tills vidare utesluter α_3,

$$\begin{bmatrix} -500 & -2500 \\ -1000 & -1000 \end{bmatrix}$$

Siffrorna tarvar knappast någon förklaring. Om A inte utför någon kontroll och partiet är bra, får han betala $10 \cdot 50 = 500$ kr. vid slutsyningen, dvs. $M(1,1) = -500$, etc.

B använder vad som med vår terminologi i denna uppsats är liktydigt med en blandad strategi med sannolikheterna 0,80 och 0,20. Man finner

$$M(1) = -(0{,}80 \cdot 500 + 0{,}20 \cdot 2500) = -900; \quad M(2) = -1000$$

Det är alltså förmånligare för A att inte kontrollera alls än att kontrollera alla detaljer.

Beräkningen av $M(3)$ är något omständligare.[1] Antag att B levererar ett parti med F felaktiga. Om ingen felaktig påträffas vid kontrollen, blir kontrollkostnaden 20 kr. och felkostnaden $50F$ kr., dvs. tillsammans $50F + 20$. Om minst en felaktig påträffas kontrolleras hela partiet, vilket kostar 1000 kr. Kostnaden blir alltså i medeltal

$$(50F + 20) \cdot P + 1000(1 - P)$$

där P är sannolikheten att ingen felaktig påträffas. Nu gäller

$$P \approx \left(1 - \frac{F}{1000}\right)^{20}$$

vilket för $F = 10$ och $F = 50$ blir ca 0,82 resp. 0,36. Insättes dessa värden ovan, erhålles medelkostnaden 610 resp. 1560 kr. (avrundat till jämna tiotal kr.). Den fullständiga betalningsmatrisen blir alltså

$$\begin{bmatrix} -500 & -2500 \\ -1000 & -1000 \\ -610 & -1560 \end{bmatrix}$$

Vi finner till sist

$$M(3) = -(0{,}80 \cdot 610 + 0{,}20 \cdot 1560) = -800$$

[1] Denna del av exemplet är i själva verket en tillämpning av beslutsteorien men kan med fördel diskuteras redan på detta stadium.

vilket är 100 kr. mindre än $M(1)$. Det är alltså förmånligare för A att begagna stickprovskontrollen. Dock bör det tilläggas att vi inte tagit hänsyn till att det kan kosta en slant att ta ut ett slumpmässigt stickprov ur partiet.

Lösningen är som synes avhängig av den kännedom man har om den s. k. feltalsfördelningen, vilken anger hur ofta partier med olika felantal uppträder. Om denna fördelning är helt okänd, vilket tyvärr ofta är fallet, är det inte lätt att planera kontrollen rationellt. Det är i själva verket liktydigt med att säga att A spelar mot en motståndare, vars blandade strategi han inte känner. A har då intet annat val än att försöka spekulera ut denna strategi, dvs. att så småningom bestämma feltalsfördelningen.

3a. Strategiska spel

»Hvilken vej bør jeg vælge. Mangen vej
står mig åben;
og i valget kender man vismand fra tåben.»
Ibsen, Peer Gynt.

3.1. Allmänt om tvåpersons-nollsummespel

I Ex. 2 a gavs ett exempel på ett strategiskt spel. Teorien för sådana spel är numera omfattande, och endast de grundläggande frågorna skall diskuteras. Allt som kommer att sägas om strategiska spel avser s. k. tvåpersons-nollsummespel. Ett sådant spel utföres på följande sätt:

A väljer en av strategierna $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ och B en av strategierna $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Spioneri tillåtes ej. Om A väljer α_i och B väljer β_j, får A beloppet $M(i, j)$ av B.

(Termen nollsummespel motiveras av att vid allmännare former av tvåpersonsspel A får ett belopp $M_1(i, j)$ och B ett belopp $M_2(i, j)$, t. ex. från en bank, dvs. varje spelare har en egen betalningsmatris. I ett nollsummespel är $M_1(i, j)+M_2(i, j)=0$, därav namnet.)

Det finns två sätt att spela ett tvåpersons-nollsummespel på. A och B kan använda *rena strategier*, dvs. välja ett bestämt α_i resp. β_j. En annan möjlighet är att de begagnar *blandade strategier*, dvs. låter var sin slumpmekanism avgöra valet (vi skall senare berätta mera om detta).

3.2. Rena strategier

När bör A och B använda rena strategier och hur skall i så fall dessa väljas? Denna dubbla fråga skall besvaras på två sätt som skenbart skiljer sig åt men som strax skall visa sig vara identiska.

(a) Maximin-resonemang

Låt oss resonera på samma sätt som i Ex. 2 a, ehuru allmännare. Läsaren uppmanas att ha betalningsmatrisen i 1.3 för ögonen.

Om A väljer α_i, kommer han vad än B gör att åtminstone få det minsta av talen i den i:te raden i matrisen, dvs. minst $\min_j M(i, j)$. Genom att välja den strategi α_{i_0} som gör detta radminimum så stort som möjligt kan han alltså tillförsäkra sig åtminstone beloppet

$$u = \max_i \min_j M(i, j)$$

B kan resonera på följande sätt. Om han väljer ett visst β_j, kommer han aldrig att behöva betala mer än det största av talen i den j:te kolumnen i M, dvs. ej mer än $\max_i M(i, j)$. Genom att välja det alternativ β_{j_0} som gör detta kolumnmaximum så litet som möjligt behöver han alltså inte betala mer än

$$v = \min_i \max_j M(i, j).$$

Det framgår av resonemanget att man alltid har

$$u \leqq v.$$

Spelarna A och B kan alltså tillse att de får minst u resp. inte behöver betala mer än v.

Antag speciellt att $u = v$, dvs. att det största radminimet är lika med det minsta kolumnmaximet. Det är klart att A då bör välja α_{i_0} och att B bör välja β_{j_0}. Ty A får då säkert beloppet $u = v$ (eller mer, om B till äventyrs skulle bära sig oförståndigt åt), och B behöver betala högst samma belopp (eller mindre om A skulle bära sig oklokt åt). Vi kallar α_{i_0} och β_{j_0} för spelarnas *optimala strategier*. Talet $u = v$ kallas *spelets värde* och anger alltså det belopp som A får av B.

I Ex. 2 a var $u = v = 2$. Spelets värde var alltså lika med två bombdagar.

(b) Sadelpunktsresonemang

Vi inför följande definition:

> En matris säges ha en sadelpunkt, om det finns ett element $M(i_0, j_0)$ som är mindre än eller lika med de övriga elementen i samma rad samt större än eller lika med elementen i samma kolumn, dvs. om för alla i, j
>
> $$M(i, j_0) \leqq M(i_0, j_0) \leqq M(i_0, j)$$

Om det finns ett sådant element, är det klart att A bör välja strategien α_{i_0}. Ty se på andra hälften av olikheten! Det framgår av denna att

A, vad än B gör, alltid får minst beloppet $M(i_0, j_0)$. Se därnäst på första hälften av olikheten! Av denna framgår att, om B väljer β_{j_0}, han aldrig behöver betala mer än $M(i_0, j_0)$ vad än A gör. Det klokaste A och B kan göra är alltså att välja α_{i_0} resp. β_{j_0}.

Maximin-resonemanget och sadelpunktsresonemanget leder i själva verket till samma resultat, vilket framgår av följande sats:

> I en matris M är $u=v$ om och endast om matrisen har minst en sadelpunkt.

Beviset består av två delar. Antag först att det finns en sadelpunkt $M(i_0, j_0)$. Eftersom u enligt sin definition är störst av alla radminima och $M(i_0, j_0)$ enligt definitionen av en sadelpunkt är ett av dessa radminima, gäller $u \geqq M(i_0, j_0)$. Analogt visas att $M(i_0, j_0) \geqq v$. Alltså är $u \geqq v$. Men vi vet att $u \leqq v$ (se föreg. sida). Sålunda gäller $u=v$.

Antag omvänt att $u=v$. Vi kan förutsätta att u och v uppnås på följande platser i matrisen (ev. även på andra): $u=M(i_1, j_1)$; $v=M(i_2, j_2)$. Eftersom u enligt definition är minst i sin rad, är speciellt $u \leqq M(i_1, j_2)$. Eftersom v är störst i sin kolumn, är analogt $M(i_1, j_2) \leqq v$. Alltså gäller

$$u=M(i_1, j_1) \leqq M(i_1, j_2) \leqq M(i_2, j_2)=v$$

Men vi antog att $u=v$, och följaktligen gäller likhetstecken överallt. Härav inses att inte blott $M(i_1, j_1)$ utan även $M(i_1, j_2)$ är minst i sin rad, och analogt att inte blott $M(i_2, j_2)$ utan även $M(i_1, j_2)$ är störst i sin kolumn. Alltså har matrisen minst en sadelpunkt, nämligen elementet $M(i_1, j_2)$.

> Resultatet av den just förda diskussionen blir alltså i korthet: Om en matris har en sadelpunkt $M(i_0, j_0)$ bör A och B välja de rena strategierna α_{i_0} resp. β_{j_0}.

Exempel:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 3 & 9 & \underline{2} & 4 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Det understrukna elementet är minst i sin rad och störst i sin kolumn, alltså sadelpunkt.

Eventuellt kan det finnas flera sadelpunkter, vilka i så fall alla är lika. Spelarna kan då låta vilken som helst av sadelpunkterna bestämma valet av strategier.

3.3. Blandade strategier

Ex. 2b. Rabaul-konvojen (forts.)

Låt oss utgå från situationen i Ex. 2a och ändra den något. Antag

Insänd litteratur

John Wiley & Sons, Inc., New York/London, 1960:

K. A. Brownlee, *Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering.* Pp. 570, $ 16.75.

G. E. Forsythe/W. R. Wasow, *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations.* Pp. 444, $ 11.50.

I. Niven/H. S. Zuckerman, *An Introduction to the Theory of Numbers.* Pp. 250, $ 6.25.

S. E. Liverhant, *Nuclear Reactor Physics.* Pp. 447, $ 9.75.

W. C. Sangren, *Digital Computors and Nuclear Reactor Calculations.* Pp. 208, $ 8.50.

P. R. Aigrain et al, *Electronic Processes in Solids.* Pp. 67, $ 4.00.

E. J. Gardner, *Principles of Genetics.* Pp. 366, $ 7.50.

W. H. Louisell, *Coupled Mode and Parametric Electronics.* Pp. 268, $ 11.50.

B. Bresler/T. Y. Lin, *Design of Steel Structures.* Pp. 710, $ 9.75.

R. B. Bird/W. E. Stewart/E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena.* Pp. 780, $ 13.75.

P. H. Egli (Editor), *Thermoelectricity Conference September* 1958. Pp. 407, $ 10.00.

A. Zucker et al (Editors), *Proceedings of the Second Conference on Reaction between Complex Nuclei.* Pp. 319, $ 7.00.

H. C. Gatos et al (Editors), *The Surface Chemistry of Metals and Semiconductors.* Symposium October 1959. Pp. 526, $ 12.50.

L. Melander, *Isotope Effects on Reaction Rates.* The Ronald Press Co., New York, 1960. Pp. 181, $ 6.00.

A. T. Bharucha-Reid, *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications.* McGraw-Hill, New York, 1960. Pp. 438, 89s. net.

D. G. Northcott, *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge Univ. Press, 1960. Pp. 282, 42s. 6d. net.

A. Landé, *From Dualism to Unity in Quantum Theory.* Cambridge Univ. Press, 1960. Pp. 114, 18s. 6d. net.

K. S. Snell/J. B. Morgan, *New Mathematics.* Vol. II. Cambridge Univ. Press, 1960. Pp. 304, 10s. net.

F. Gerrish, *Pure Mathematics.* Vol. I, Pp. 1—392, 25s. net. Vol. II, Pp. 393—806, 35s. net. Cambridge Univ. Press, 1960.

W. Rindler, *Special Relativity.* Oliver & Boyd, Edinburgh/London, 1960. Pp. 186, 10s. 6d. net.

G. H. Hardy/E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers.* 4th Ed. Clarendon Press: Oxford Univ. Press, 1960. Pp. 421, 42s. net.

W. D. Allen, *Neutron Detection.* Newnes Ltd, London, 1960. Pp. 260, 45s. net.

R. W. M. D'Eye/E. Wait, *X-Ray Powder Photography in Inorganic Chemistry.* Butterworth's Scientific Publications, London, 1960. Pp. 222, 45s. net.

F. C. Champion, *University Physics.* Blackie & Son, London/Glasgow, 1960. Pp. 786, 30s. net.

D. R. L. Smith/J. Houghton, *Fluid Mechanics Through Worked Examples.* Cleaver-Hume Press, London, 1960. Pp. 344, 28s. net.

N. Clarke (Editor), *A Physics Anthology.* Chapman & Hall, London, 1960. Pp. 323, 35s. net.

Reports on Progress in Physics. Vol. XXIII (1960). The Physical Society, London, 1960. Pp. 629, 63s. net.

G. Knudsen, *Fysik.* Gyldendal, København, 1960. 172 s., dkr 14:75.

Th. Sundorph, *Fysik for begyndere.* 23. oplag ved F. Hjerting. Gyldendal, København, 1960, 131 s.

S. A. Bo/P. Hanghøj/K. Larson, *Arbejdsbog i fysik og kemi.* 6. og 7. skoleår. Gyldendal, København, 1960. 48 s., dkr 6:85.

Focus, En uppslagsbok i fem band. Bd V, Index till Bd I—IV: Register (352 s.),

Synonymer (40 s.). Tabeller (60 s.) Litteraturanvisningar och bildöversikt (18 s.). Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1960.

Oorganisk kemisk nomenklatur. Tekniska Nomenklaturcentralens Publikation nr 32, Stockholm, 1960. 48 s., kr 7:—.

I. Bolin/B. Gustaver, *Den organiska kemin.* Del I. Kolföreningarnas kemi. 221 s., inb. kr 21:—. Del II. Biokemi. 152 s., inb. kr 15:—. Del III. Organisk kemi i teknik och praktik. 230 s., inb. kr 22:—. Bokförlaget Liber, Stockholm, 1960.

A. B. C. Lovell, *Universums uppkomst.* Övers. av L. Edberg, Natur & Kultur, Stockholm 1960. 109 s., kr 7:50.

M. Gardner, *Rolig matematik.* Övers. av B. Stolpe. Natur & Kultur, Stockholm, 1960. 170 s., kr 12:50.

O. Lundquist, *Experimentell fysik.* Handbok för kurs i fysikaliska demonstrationer och undervisningsexperiment. Del II. 2:a uppl., stenciltryck, A4-format, 190 s., kr 20:—. Lund, 1960. Kan rekvireras från Fysiska Institutionen, Lund.

Svenska Bokförlaget, Stockholm, 1960:

H. Bergström, *Att studera matematik.* Scandinavian University Books, 136 s., kr 15:75.

Almkvist/Beskow/Herlin/Knave, *Fysik för realgymnasiet* IV. Optik av G. Almkvist. 120 s., kr 6:25.

H. Bohlin, *Elektricitetslära och elektroteknik.* 8:e uppl. 670 s., kr 21:—.

Malmborg/Sundström, *Fysik för realskolan.* 7:e årskursen. Om krafter, energi, akustik. 126 s., kr 5:25.

Almkvist/Knave/Lindholm, *Fysik för realskolan.* Tredje årskursen. 110 s., kr 5:75.

Hedström/Rendahl/Ekbom, *Räknetabeller för realskolan och enhetsskolan.* 16 s., kr 1:—.

Hedström/Rendahl/Ekbom/Bågman, *Algebra och Geometri* 2. 10:e uppl. För reallinjens matematiska gren. 122 s., kr 5:85.

Wahlström/Olsén, *Räknebok.* Alt. 2. För enhetsskolan årskurs 9 och realskolans avslutningsklass. 138 s., kr 4:25.

— *Övningsbok i räkning.* Alt. 2. 106 s., kr 3:75.

Moll/Starck, *Lärobok i kemi för realskolan.* Del 2. 11:e uppl. 68 s., kr 1:90.

att vädret väntas bli regnigt både i norr och söder, så att betalningsmatrisen blir

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hur skall A och B då handla? Någon sadelpunkt finns inte, och $u=1$, $v=2$. Det ligger då nära till hands för spelarna att använda blandade strategier, dvs. att låta slumpen avgöra hur de skall handla.

Antag att A väljer α_1 med sannolikheten x och α_2 med sannolikheten $1-x$. Vilka konsekvenser får detta? Om B skulle välja β_1, blir medelantalet bombdagar

$$2x+(1-x)=x+1$$

Väljer B i stället β_2, blir medelantalet

$$x+2(1-x)=2-x$$

Vi sätter dessa båda uttryck lika, vilket leder till $x=\frac{1}{2}$. Med andra ord, om A singlar slant, får han i genomsnitt lika mycket vad än B gör, nämligen 1,5 bombdagar.

På liknande sätt bör B välja β_1 med en viss sannolikhet y och β_2 med sannolikheten $1-y$. Det optimala värdet blir $y=\frac{1}{2}$, dvs. även B bör singla slant. Hans betalning till A blir då i medeltal 1,5 bombdagar vad än A gör.

Slutsatsen blir alltså att, om A och B var för sig vill tillförsäkra sig bästa möjliga resultat *i genomsnitt*, bör de begagna blandade strategier. Att befälhavarna finner det vara under sin värdighet att singla slant och därför kanske söker någon annan utväg ändrar inte på resultatets riktighet!

Vi skall nu resonera fullt allmänt. Låt M vara en godtycklig betalningsmatris utan sadelpunkt. Antag att A använder en sannolikhetsvektor (jfr 2.1)

$$x=(x_1, \ldots, x_m); \quad \Sigma x_i=1$$

och B en sannolikhetsvektor

$$y=(y_1, \ldots, y_n); \quad \Sigma y_j=1$$

Vektorerna kan för ögonblicket vara godtyckliga; vi skall strax se hur de kan bestämmas. A väljer med hjälp av x en blandad strategi $\alpha(x)$ och B med hjälp av y en blandad strategi $\beta(y)$. Detta innebär m. a. o. att A väljer α_1 med sannolikheten x_1, α_2 med sannolikheten x_2 etc., och analogt för B. Hur dessa procedurer utföres praktiskt har vad B beträffar redan beskrivits i 2.1, ehuru beteckningarna där var annorlunda. Konsekvenserna av de båda valen blir, att A *i medeltal* av B får beloppet

$$M(x,\ y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\ y_j\ M(i,j)$$

Hur skall A och B välja vektorerna x resp. y, så att var och en på bästa sätt tillgodoser sina egna intressen? Detta spörsmål kan besvaras på ett elegant sätt. Vi har bara att på funktionen $M(x, y)$ tillämpa samma resonemang som vi förut använde på betalningsmatrisens element $M(i, j)$. Skillnaden är den att den förstnämnda funktionen varierar över alla tänkbara vektorer x och y och alltså kan anta ett oändligt antal värden, medan den sistnämnda antar bara $m \cdot n$ värden. Resultatet blir följande:

(a) Maximin-resonemang

Om A väljer en viss vektor x, kommer han, vad än B gör, att i medeltal åtminstone få det minsta av de tal $M(x, y)$ som erhålles om y tillåtes variera över hela sitt variationsområde (dvs. så att $\Sigma y_j=1$). Dvs. han får i medeltal minst $\min_y M(x, y)$. Genom att söka rätt på och sedan vid lottdragningen begagna den vektor

$$x_0=(x_1^0, \ldots, x_m^0)$$

som gör detta minimum så stort som möjligt, kan alltså A i medeltal tillförsäkra sig beloppet

$$U=\max_x \min_y M(x, y)$$

B kan handla på liknande sätt. Genom att använda den vektor

$$y_0=(y_1^0, \ldots, y_n^0)$$

som gör $\max_x M(x, y)$ så litet som möjligt, behöver han i medeltal aldrig betala mer än

$$V=\min_y \max_x M(x, y)$$

Det följer av resonemanget att

$$U \leqq V$$

Det märkliga är emellertid att man kan bevisa ett mycket starkare resultat nämligen:

Varje betalningsmatris M har den egenskapen att $U=V$.

Denna fundamentala relation utgör *spelteoriens huvudsats* och bevisades av von Neumann 1928 [6]. Huvudtankarna i dennes bevis har framförts på ett elementärt sätt av Følner [4], vars framställning läsaren livligt uppmanas att taga del av.

Flera andra bevis för spelteoriens huvudsats har sett dagens ljus. För en översikt över dessa hänvisas läsaren till Appendix 2 i Luce-Raiffa [5].

Låt oss kalla det gemensamma värdet $U=V$ för c och benämna det *spelets värde*. (Vi skall strax se att denna definition stämmer med den i 3.2 givna.) Vi kan då påstå följande:

> Genom att begagna den blandade strategien $\alpha(x_0)$ — dvs. genom att välja α_1 med sannolikheten x_1^0, α_2 med sannolikheten x_2^0, etc. — får A i medeltal minst beloppet c vad än B gör, och genom att begagna den blandade strategien $\alpha(y_0)$ behöver B i medeltal icke betala mer än beloppet c vad än A gör.

Eftersom båda spelarna förutsätts vara kloka, bör de använda just de angivna strategierna. De kallas därför *optimala strategier*. Om spelarna använder dem, får A i medeltal beloppet c av B. Sannolikhetsvektorerna x_0 och y_0 kallas likaledes optimala.

Om c skulle vara större än 0, är detta beklagligt för B, ty han kommer i medeltal att vidkännas en förlust, men han bör låta sig nöja härmed, ty det hjälper honom inte att välja någon annan strategi. I det speciella fallet $c=0$ säges spelet vara *rättvist*.

(b) Sadelpunktsresonemang

Föregående avsnitt har redan gett svar på huvudfrågan, men det skadar inte att belysa den ytterligare. Låt oss i analogi med definitionen i 3.2 definiera:

> Funktionen $M(x, y)$ säges ha en sadelpunkt x_0, y_0 om för alla sannolikhetsvektorer x och y
>
> $$M(x, y_0) \leqq M(x_0, y_0) \leqq M(x_0, y)$$

Liksom i 3.2 framgår det direkt av denna olikhet att $\alpha(x_0)$ och $\beta(y_0)$ är optimala strategier för A resp. B. Om det finns en sadelpunkt är alltså saken klar. Och det finns verkligen alltid en sådan (eller ev. flera). Man kan nämligen utsträcka den sats som bevisades tidigare och visa att $U=V$ om och endast om funktionen $M(x, y)$ har minst en sadelpunkt. Eftersom spelteoriens huvudsats utsäger att $U=V$, är alltså ringen sluten. Varje funktion $M(x, y)$ har minst en sadelpunkt — ett märkligt resultat!

Ett tillägg bör göras. Eftersom de blandade strategierna innehåller de rena som specialfall, följer det av utläggningen i (a) och av den tidigare diskussionen av rena strategier, att vi kan skriva

$$u \leqq U = c = V \leqq v.$$

Man ser här situationen i ett nötskal: om $u=v$, dvs. om den ursprung-

liga betalningsmatrisen M har en sadelpunkt $M(i_0, j_0)$, kan A och B med lugn begagna de rena strategierna α_{i_0} och β_{j_0}, och spelets värde blir då $u=v=c$. Dessa rena strategier är då optimala. Om däremot $u<v$, kan A och B med hjälp av rena strategier endast säkert få beloppet u resp. begränsa utbetalningen till v. Genom att använda de optimala blandade strategierna kan A och B förbättra sin situation och *i medeltal* få resp. begränsa sin betalning till beloppet c. Men observera förutsättningen: vi har antagit att spelarna är nöjda med det medelvärdesresonemang som användningen av blandade strategier bygger på.

Litteratur

1. Blackwell, D., och Girshick, M. A., Theory of games and statistical decisions. New York, 1954.
2. Bross, I. D. J., Design for decision. New York, 1953.
3. Chernoff, H., och Moses, L. E., Elementary decision theory. New York, 1959.
4. Følner, E., Elementer af von Neumann's spilteori. Nordisk Matematisk Tidskrift, **1**, 1953, 115—126.
5. Luce, R. D., och Raiffa, H., Games and decisions. New York, 1957.
6. von Neumann, J., Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Math. Ann., **100**, 1928, 295—320.
7. von Neumann, J., och Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior. Princeton, 1944.
8. McKinsey, J. C. C., Introduction to the theory of games. New York, 1952.
9. Savage, L. J., The foundations of statistics. New York, 1954.
10. Vajda, S., The theory of games and linear programming (Methuen's monographs on physical subjects). London, 1956.
11. Wald, A., Statistical decision functions. New York, 1950.
12. Williams, J. D., Den fulländade strategen. Stockholm, 1957.

Höger och vänster i död och levande materia

Av professor Gunnar Hägg, Uppsala

Frågor beträffande likvärdhet eller skillnad mellan höger och vänster är ofta av stor betydelse inom vitt skilda delar av naturvetenskapen och har dessutom aktualiserats genom erfarenheter, som gjorts under de allra sista åren. I det följande berörs några av dessa frågor utan anspråk på fullständighet.

Framställningen kan lämpligen inledas med ett ofta anfört tankeexperiment (se t. ex. O. Klein, Svensk Naturvetenskap 1959, s. 174), som torde vara ganska belysande för vad som diskuteras i det följande. Antag att man för en högt utvecklad varelse på en avlägsen himlakropp skulle förklara hur modellen *a* i fig. 1 ser ut. Det förutsätts att bilder inte kan översändas, utan att förklaringen endast kan ges på något slags språk. Vi antas inte heller gemensamt känna till några lägesförhållanden av annat slag till vilka någon anknytning kan göras. Man kan då säga att man på ett visst avstånd från en utgångspunkt *O* har en kula av ett visst slag (här betecknad vit) och i en från riktningen till denna kula vinkelrät riktning har en kula av annat slag (svart). Så långt är beskrivningen entydig. En tredje kula (grå) skall ligga i en riktning, som bildar rät vinkel med riktningarna till de båda första kulorna, men det finns två sådana riktningar, och man skulle inte, åtminstone med den kunskap man hade före 1956, kunna utan en bild beskriva för främlingen vilken av dessa som är den riktiga. Främlingen skulle lika väl kunna tro att modellen såg ut som förebildens spegelbild, dvs. som *b* i fig. 1. För en svensk skulle man kunna säga att om man utgående från *O* vänder den vita kulan framåt och den svarta uppåt, så skall den grå ligga åt vänster. För en jordinnevånare, som inte vet vad vänster är, skulle man kunna säga att den grå kulan skall ligga åt samma håll som hjärtat i bröstet (sannolikheten för att hjärtat ligger åt höger är ju mycket liten).

Hade modellen haft en sådan byggnad att den varit lika med sin spegelbild, hade tydligen inte den nu omnämnda svårigheten inträffat. Den kunde t. ex. ha haft en grå kula i stället för den svarta (fig. 2 *a* och *b*). En vridning omkring förbindelselinjen mellan *O* och den

---

Ämnet behandlades av förf. vid Svenska Kemistsamfundets Berzeliusdagar i jan. 1960 i ett föredrag, publicerat i *Svensk Naturvetenskap*, Statens Naturvetenskapliga Forskningsråds Årsbok, årg. *13*, 240, 1960. Det införes i Elementa i något förändrad form.

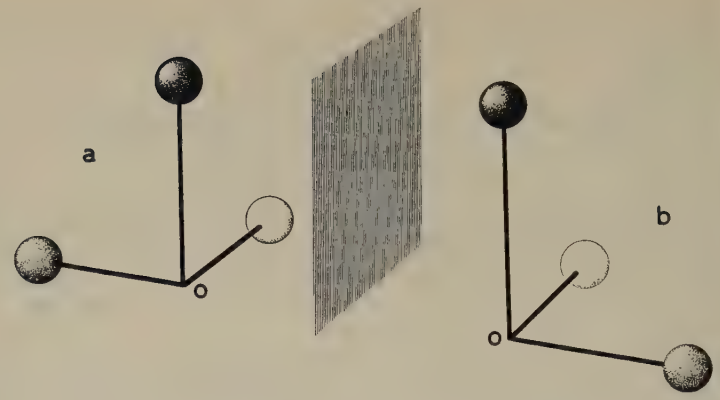


Fig. 1. *a* asymmetriskt föremål, *b* dess spegelbild.

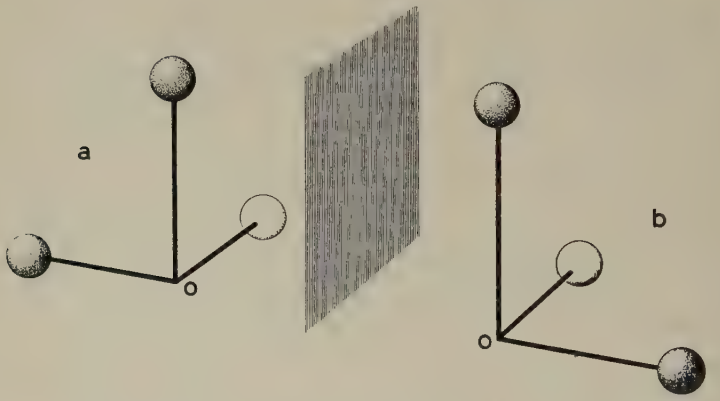


Fig. 2. Identitet mellan föremål och spegelbild vid icke asymmetri.

vita kulan visar att föremålet och dess spegelbild nu är lika. Detta beror på att föremålet nu har ett symmetriplan, vilket illustreras av fig. 3 *a*; det är lätt att övertyga sig om att varje föremål med denna egenskap är lika med sin spegelbild. Föremålet blir också lika med sin spegelbild, om det har ett symmetricentrum, dvs. om, utgående från en punkt, symmetricentret, varje riktning är likvärd med sin motriktning (fig. 3 *b*).

[1] Här bortses från det sällsynta fallet att föremålet äger en s. k. fyrtalig vridinversionsaxel varvid föremål och spegelbild blir olika trots att symmetriplan och symmetricentrum saknas.

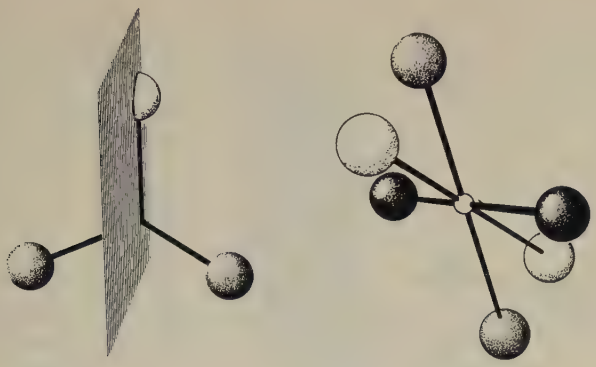


Fig. 3. Föremål med *a* symmetriplan och *b* symmetricentrum (angivet av den lilla centrala sfären).

Saknas både symmetriplan och symmetricentrum, är föremålet och dess spegelbild olika, de förhåller sig som vänstra handen till den högra.[1] Om vi kallar en av de båda modellerna i fig. 1 en vänsterform, blir den andra en därifrån skild högerform. Man säger i detta fall ofta att föremålet är *asymmetriskt.*

Som exempel på ett asymmetriskt föremål brukar man ofta nämna en skruv. Om man går i skruvaxelns riktning och därvid skruvlinjen (gängan) löper medurs, sägs enligt överenskommelse skruven vara en högerskruv (högergängad). Löper skruvlinjen moturs, sägs skruven vara en vänsterskruv (vänstergängad). Skruvens typ ändras givetvis inte, om man går utefter skruvaxeln i motsatt riktning. En högerskruv är spegelbild till en för övrigt likadan vänsterskruv, men de båda är icke identiska. — Uttrycket asymmetrisk är dock inte alldeles riktigt därför att symmetriaxlar får finnas. Exempelvis är en propeller asymmetrisk i den här givna bemärkelsen, men den äger alltid en symmetriaxel, propelleraxeln.

Det är mellan vänster- och högerform av asymmetriska föremål som främlingen på den andra himlakroppen inte skulle ha kunnat välja, om vi sänder honom alla de icke bildmässiga informationer som vi kunde tänka oss för tre år sedan.

Det är klart att om man efter sådana informationer skulle t. ex. bygga maskiner med asymmetriska delar, skulle dessa maskiner fungera lika bra vare sig de blev byggda som originalet eller som dettas spegelbild. Detta dock under förutsättning att, om de på något

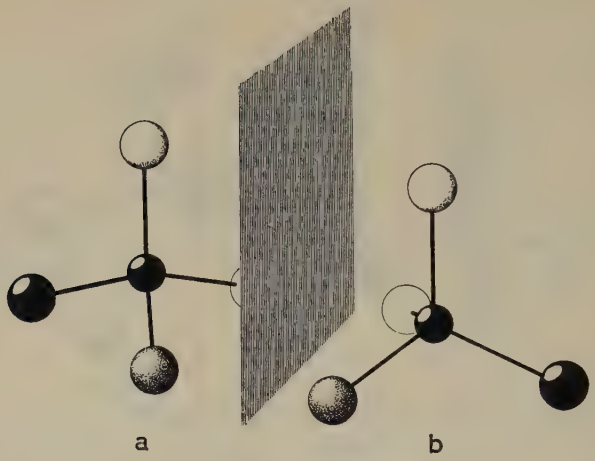


Fig. 4. Kolatom som genom bindning till fyra atomer av olika slag är asymmetrisk.

sätt måste kopplas till någon annan asymmetrisk företeelse, även denna måste spegelvändas. Om originalet är en högerskruv, fordrar denna en högergängad mutter. Spegelbilden, en vänsterskruv, fordrar en vänstergängad mutter. Om en högergängad fartygspropeller måste drivas med en högergående motor för att fartyget skall gå framåt, måste spegelbilden, en vänstergängad propeller, drivas med en vänstergående motor för att fartyget skall få oförändrad rörelseriktning.

Går man över från ett asymmetriskt original till dess spegelbild, måste alltså för korrekt funktion alla asymmetriska företeelser med vilka samverkan skall ske också gå över till sina spegelbilder. Hela komplexet måste speglas, men då blir funktionen densamma.

Tidigare har inom fysiken ansetts att detta oberoende av speglingen bör gälla alla fenomen. Man har sålunda velat tro att naturlagarna är desamma i ett givet system och i det speglade systemet. Detta är den s. k. *paritetslagen*. Nyligen gjorda experimentella rön visar emellertid att paritetslagen är generellt giltig endast med vissa preciseringar, som man tidigare ej insett. Denna mycket viktiga fråga berörs i uppsatsens slut.

Många atomgrupper, molekyler, är asymmetriska och särdeles vanligt är detta inom den organiska kemin, kolföreningarnas kemi. Kolatomen är oftast tetraedriskt bunden till fyra andra atomer, och om dessa är olika eller tillhör olika slags atomgrupper, blir kolatomens omgivning asymmetrisk (fig. 4). Man brukar i detta fall beteckna

själva kolatomen som asymmetrisk. En molekyl, som innehåller en eller flera asymmetriska kolatomer, blir i allmänhet asymmetrisk. Om en sådan molekyl bildas i en miljö där den inte påverkas av några asymmetriska inflytanden, är chansen lika stor att den får en vänsterform som en högerform (t. ex. de båda formerna i fig. 4). Vid syntes av det asymmetriska ämnet vinsyra får man sålunda lika många vänstermolekyler som högermolekyler. De båda molekylformerna får exakt samma egenskaper, så länge dessa inte innebär samverkan med asymmetriska fenomen.

Det är ganska lätt att inse att man av likadana asymmetriska byggnadsstenar aldrig kan uppföra en byggnad, som har symmetriplan eller symmetricentrum. I ett sådant fall måste alltså hela byggnaden bli asymmetrisk. En kristall, som byggs upp av t. ex. enbart vänstermolekyler av ett asymmetriskt ämne, blir därför asymmetrisk. Detta gäller alltid dess inre struktur, men asymmetrin kan ofta även påvisas hos den av strukturen beroende yttre kristallformen. Kristallen av motsvarande högermolekyler blir också asymmetrisk och utgör den icke identiska spegelbilden till den förra. Egenskaper, som inte berör asymmetriska fenomen, är lika hos båda kristallerna. De har t. ex. samma täthet, smältpunkt och löslighet i icke asymmetriska lösningsmedel (alla vanliga lösningsmedel är icke asymmetriska).

Alla kemiska reaktioner, där inga andra asymmetriska molekylslag deltar, sker också på samma sätt för både vänster- och högermolekyler. Men deltar andra asymmetriska molekyler, kan skillnader uppträda. Det är t. ex. klart att om vardera av de båda spegelbildslika molekylerna V och H förenas med en asymmetrisk molekyl av annat slag, säg vänstermolekylen v av det spegelbildslika paret v—h, blir spegelbildsförhållandet upphävt. Sålunda är $^{V}_{v}$ ej spegelbild till $^{H}_{v}$. Föreningarna $^{V}_{v}$ och $^{H}_{v}$ får därigenom i allmänhet olika egenskaper. (Däremot vore $^{V}_{v}$ spegelbild till $^{H}_{h}$, varigenom dessa föreningar får samma egenskaper så snart det inte gäller asymmetriska fenomen.)

Ett medium (kristall, smälta, gas, lösning), som innehåller en av de båda formerna av en asymmetrisk atomgrupp, vrider polarisationsplanet hos planpolariserat ljus, som går igenom mediet. Ett sådant medium sägs vara *optiskt aktivt*. Om vridningen följer en högerskruv sägs mediet vara vänstervridande (ser man mot ljuskällan och inför mediet mellan denna och ögat, vrids polarisationsplanet moturs, åt »vänster»), följer vridningen en vänsterskruv, sägs mediet vara högervridande. Båda formerna visar samma vridningsförmåga, men den ena blir höger- och den andra vänstervridande. Den optiska aktiviteten är ett bekvämt och mycket använt kännetecken på asymmetri.

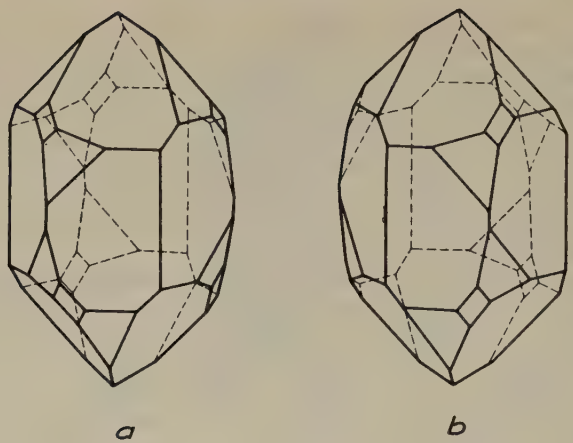


Fig. 5. Kristaller av *a* vänsterkvarts, *b* högerkvarts.

Den optiska aktiviteten beror på att ljuset i en planpolariserad ljusstråle kan anses bestå av två cirkulärpolariserade svängningar, som med samma frekvens roterar i motsatta riktningar, och att dessa svängningar i det optiskt aktiva mediet rör sig med olika hastighet. Under påverkan av den ena av de båda asymmetriska formerna rör sig den ena svängningen och under påverkan av den andra formen den motsatta svängningen med största hastigheten. Av de båda motsatta skruvrörelser, som den planpolariserade strålningen kan sägas representera, gynnas alltså högerskruven av den ena formen och vänsterskruven av den andra formen.

Det sades nyss att en byggnad uppförd av likadana asymmetriska byggnadsstenar alltid måste bli asymmetrisk. Men en asymmetrisk byggnad kan även uppföras av *symmetriska* byggnadsstenar. Det är ju t. ex. ingen svårighet att bygga en spiraltrappa, alltså en skruv, av vanliga tegelstenar, som har hög symmetri. Många ämnen är kända i sinsemellan icke identiska, optiskt aktiva vänster- och högerkristaller trots att dessas byggnadsstenar icke är asymmetriska. Ett sådant ämne är kvarts (fig. 5), ett annat är natriumklorat. Löser man emellertid en asymmetrisk kristall av t. ex. vinsyra respektive natriumklorat i vatten, blir endast vinsyralösningen optiskt aktiv. I vinsyrakristallen är nämligen byggnadsstenarna asymmetriska, i natriumkloratkristallen endast byggnaden.

Om man av ett asymmetriskt byggt ämne äger preparat av var och en av de båda spegelbildslika formerna, är det mycket svårt att avgöra vilket av dessa preparat, som har den ena konfigurationen, t. ex. fig. 4 *a*, och vilket som har den andra konfigurationen, fig. 4 *b*. En

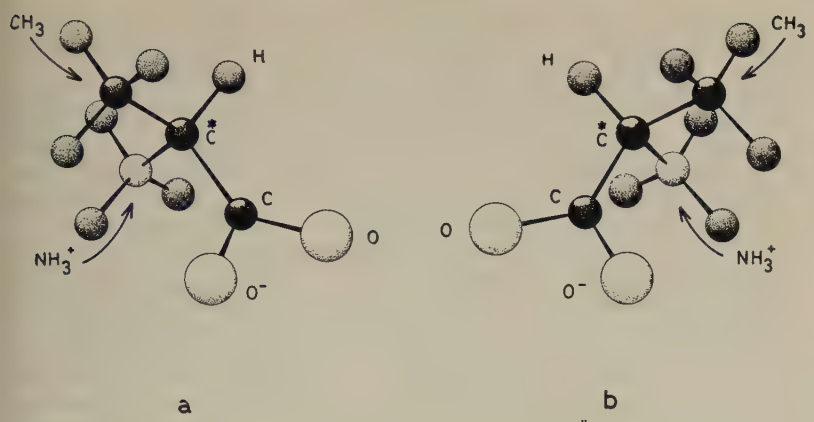


Fig. 6. Molekyl av *a* L-alanin, *b* D-alanin. Den med $\overset{*}{C}$ utmärkta kolatomen är asymmetrisk emedan den är bunden till fyra olika slags atomgrupper, en H-atom, en CH_3-grupp, en NH_3^+-grupp och en COO^--grupp.

strukturbestämning av kristallerna med röntgendiffraktion kan i allmänhet inte skilja på en vänster- och en högerform därför att diffraktionsfenomenet i sig självt inte är asymmetriskt. Endast om den använda röntgenvåglängden är sådan att s. k. anomal dispersion uppträder blir fenomenet svagt asymmetriskt och diffraktionsbilderna från kristaller uppbyggda av vänster- och av högermolekyler blir något olika. År 1951 tillämpade Bijvoet denna metod på några tartrat, dvs. salter av vinsyra, och kunde därigenom bestämma absolutkonfigurationen för vinsyrans båda former. Känner man emellertid de absoluta konfigurationerna hos formerna av ett asymmetriskt ämne, kan man ofta sluta sig till absolutkonfigurationer hos andra ämnen med hjälp av kemiska eller fysikaliska samband mellan de olika ämnena.

Alla levande organismer innehåller ett stort antal ämnen, som består av asymmetriska molekyler. Det är nu mycket anmärkningsvärt att, ehuru varje sådant ämne alltså kan bestå av både vänster- och högermolekyler, oftast endast den ena av dessa båda former är representerad i den organiska världen. Det mest framträdande exemplet härpå utgör aminosyrorna.

Alla aminosyror utom den enklaste, glycin, har asymmetriska molekyler. Fig. 6 visar de båda formerna av aminosyran alanin, kallade L- och D-alanin. Den i varje form med $\overset{*}{C}$ betecknade kolatomen är bunden till fyra olika atomgrupper och är därför asymmetrisk. Kolatomer med liknande omgivning finns i alla övriga asymmetriska aminosyror. Är konfigurationen hos en sådan analog med

den i L-alanin, kallas syran en L-syra, är den analog med den i D-alanin, kallas syran en D-syra (L och D är förkortningar av latinets lævus = vänster och dexter = höger och är grundade på en geometrisk konvention men har intet att göra med ämnets optiska vridningsriktning). Av de 23 asymmetriska aminosyror, som tillika med glycin är proteinernas byggnadsstenar, ingår i dessa praktiskt taget enbart L-syrorna. Detta gäller vare sig man undersöker proteiner från växter eller djur, från lägre organismer eller från högre organismer.

En organism skulle emellertid inte kunna fungera, om ett livsviktigt asymmetriskt ämne byttes ut mot sin spegelbild. Enda möjligheten vore att *varje* sådant ämne byttes mot spegelbilden, så att den nya organismen i sin helhet rent kemiskt så att säga blev en spegelbild av den nuvarande. En människa hos vilken detta hände skulle att börja med inte märka någonting, hon skulle kunna andas, hon skulle kunna dricka vatten, och kroppsfunktionerna skulle fortsätta som förr. Men hon skulle nu behöva tillförsel av D-aminosyror och inte kunna tillgodogöra sig L-aminosyrorna i den vanliga födans proteiner. Hon skulle därför snart gå under, om hon inte tillfördes laboratoriemässigt framställda livsviktiga D-aminosyror. En kemiskt spegelvänd man skulle inte heller kunna få barn annat än med en kvinna, som också vore kemiskt spegelvänd. Om däremot *alla* livsviktiga asymmetriska ämnen på jorden byttes ut mot sina spegelbilder, skulle livet kunna gå vidare som vanligt.

Denna koherens hos det asymmetriska kemiska systemet i den levande naturen på jorden kan förklaras, om livet på jorden uppkommit i en enda punkt. Någon gång i livets begynnelse togs då en av de båda spegelbildslika formerna av en asymmetrisk molekyl i bruk. Denna orsakade bildningen eller upptagandet av just en av formerna av en annan asymmetrisk molekyl, och på så sätt uppbyggdes hela det samverkande systemet. Om livet börjat i flera punkter, skulle sannolikt i en del av dessa ha utvecklats det ena asymmetriska systemet och i den andra dettas kemiska spegelbild. Om så skett har uppenbarligen organismerna med det ena av dessa system så småningom gått under. En möjlighet finns naturligtvis att någon för hela jorden generell asymmetrisk faktor verkat i samma riktning i alla de punkter där liv uppstått. Man känner inte med säkerhet någon sådan faktor men, som senare skall nämnas, har denna fråga aktualiserats genom de nyare erfarenheterna beträffande paritetslagen.

Det förefaller alltså inte alldeles omöjligt att livet på en annan himlakropp kan arbeta med spegelbilden till vårt kemiska system. En framtida rymdfarare kanske inte kan livnära sig på en oxe, som han möter på en främmande planet. Det är inte heller säkert att denna oxstek skulle smaka honom. I smak- och luktsinnets kemiska processer

deltar nämligen från kroppens sida bland annat asymmetriska molekyler av enbart vänster- eller enbart högerform och dessa kan reagera märkbart olika beroende på om en inkommande molekyl är en vänster- eller en högermolekyl. Man känner flera fall där en asymmetrisk molekyl smakar olika mot spegelbilden.

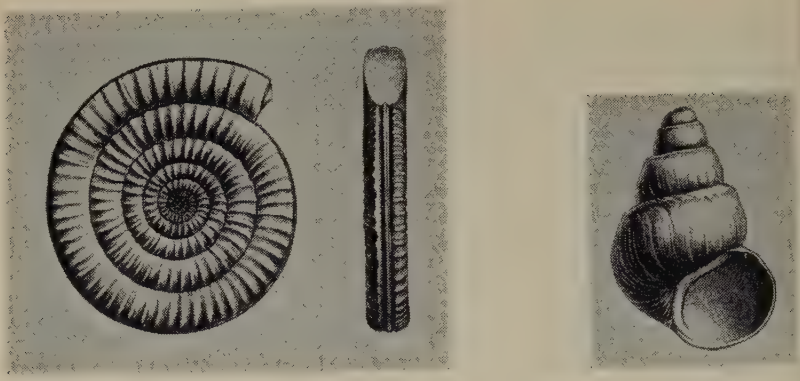
Eftersom livet på jorden arbetar med endast det ena slaget av ett asymmetriskt kemiskt system, är det klart att fall av spegling av en morfologisk asymmetri hos levande organismer inte kan bero på att det speglade kemiska systemet uppträder. Det kemiska systemet är detsamma hos en vänster- och en högervriden snäcka av samma art, liksom hos en normalt byggd människa och en människa med fullständig situs inversus, dvs. omvänt läge av alla inre organ.

I samband med omnämnandet av morfologisk asymmetri hos levande organismer bör något mera sägas därom. Endast några påfallande drag kan emellertid omnämnas och detta helt ytligt.

Hos ett djur med självständig rörelseförmåga kommer rörelseriktningen att bestämma en framåt-bakåtriktning och tyngdkraften en uppåt-nedåtriktning. Dessa två riktningar definierar ett plan och utan ytterligare påverkningar bör de båda riktningarna normalt mot detta plan bli likvärda. Planet blir alltså ett symmetriplan, som delar kroppen i två spegelbildslika hälfter, den får bilateral symmetri. Endast distinktionen mellan höger och vänster blir godtycklig och måste göras enligt en konvention. Utvecklingsfaktorer, som tenderar att införa ärftliga skillnader mellan höger och vänster, kan antas hållas nere genom den fördel en bilateral byggnad av alla rörelseorgan ger djuret vid förflyttning. En asymmetrisk utveckling av rörelseorganen skulle orsaka en skruvliknande rörelse. Särskilt viktig blir en bilateral byggnad, när hydro- eller aerodynamiska lagar spelar större roll för rörelsen. Den yttre kroppsformen hos snabbare simmare och hos alla flygare har alltid utpräglat bilateral symmetri.

De flesta ryggradsdjur är praktiskt taget bilateralt byggda till det yttre. De inre organen visar däremot nästan alltid asymmetri, och den utvecklingsmässiga orsaken till denna är inte tillfredsställande förklarad. Total situs inversus av de inre organen förekommer men är åtminstone hos människan sällsynt och förefaller inte att vara ärftlig. Flundrefiskarna visar även en *yttre* asymmetri, som rent geometriskt kan sägas bero på att fisken lagt sig med symmetriplanet parallellt med havsbotten och därefter förlorat detta genom de mycket olika påverkningarna uppifrån och nedifrån. Varje individ av en flundrefisk når ju också sin asymmetriska kroppsform genom en utveckling av detta slag.

Välkända exempel på stark asymmetri utgör snäckorna. Asymmetrin är vid yttre påseende särskilt framträdande hos skalet. Om ett skal



a b

Fig. 7. *a* skal av ammonit sett från två olika håll, *b* högervridet snäckskal.

bildar en plan spiral som hos ammoniterna (fig. 7 *a*) eller nautilussnäckan, som är bläckfiskar, äger det ett symmetriplan och är därför inte asymmetriskt. Hos snäckorna är spiralen emellertid oftast inte plan, varigenom asymmetri uppstår. Skalets vridningsriktning avgör enligt en konvention om man har en vänster- eller en högersnäcka (fig. 7 *b*). Hos de flesta snäckarter överväger den ena formen mycket starkt och oftast är detta högerformen. Det förefaller som om en avvikelse från den vanligaste vridningsriktningen, en inversion, ibland kan vara genotypiskt och ibland fenotypiskt betingad. Hos en planktonforaminifer, Globigerina pachyderma, som har en i viss mån snäckliknande spiralform, har man nyligen funnit att vridningsriktningen beror på temperaturen hos det vatten vari djuret uppstått. Man hoppas nu kunna använda detta för att dra slutsatser angående temperaturen hos det forntida hav varur det djuphavsslam avsatts, som innehåller skal av denna Globigerinaart.

Hos växterna är det intressant att studera den asymmetri, som ger sig tillkänna i slingerväxternas skruvning. En viss art utmärks oftast av en bestämd skruvriktning. De allra flesta arter har högerskruvar, vänsterskruvar möter man hos humle och hos kaprifol samt övriga Loniceraarter. Hos ett flertal arter, t. ex. den ganska svagt slingrande besksötan, Solanum dulcamara, kan man finna i förhållande till normalskruven inversa skruvar. Dessa är troligen fenotypiska.

Efter denna avvikelse till biologin återgår vi till fysiken där nyligen de förut nämnda avvikelserna från paritetslagen påvisats (härvid hänvisas åter till den i inledningen nämnda uppsatsen av O. Klein).

Det var en del egendomliga iakttagelser rörande ett slag av elemen-

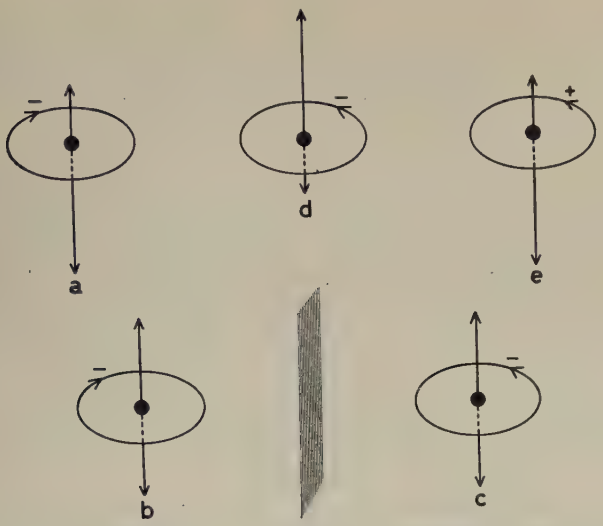


Fig. 8. Principer för det första försöket till prövning av paritetslagen.

tarpartiklar, s. k. K-mesoner, som kom de två i USA verksamma kinesiska fysikerna Lee och Yang att låta anställa några experiment för att pröva paritetslagen.[1] Det första av dessa utfördes 1956 av deras landsmaninna, Mrs. Wu och medarbetare. Härvid utgick man från en radioaktiv koboltisotop, som är β-strålare, dvs. sänder ut elektroner. Ett radioaktivt kobolt-preparat kyldes ned till nära absoluta nollpunkten och ett starkt magnetfält alstrades på preparatets plats. Vi vet att var och en av koboltens atomkärnor fungerar som en liten magnet och genom det pålagda magnetfältet riktas vid den låga temperaturen alla dessa små magneter parallellt med varandra. Vi kan ange fältet genom att rita ut en trådslinga av en magnetspole, som genomflyts av en elektrisk ström varigenom fältet alstras (fig. 8 *a*). Alla kärnmagneterna ställer då in sig med nord-sydriktningen normalt mot trådslingans plan, dvs. lodrätt.

Det visar sig nu att β-strålarna huvudsakligen kastas ut i en riktning. Med den i figuren angivna riktningen för strömbärarna (elektronerna) i spolen kastas strålarna mest nedåt, vilket i fig. 8 *a* anges av att den nedåtriktade pilen är längre än den uppåtriktade. Härav följer omedelbart att paritetslagen såsom man hittills uppfattat den inte gäller för detta fenomen. Man skulle också med hjälp av försöket kunna utan

[1] Se t. ex. Ingmar Bergström, Spegelsymmetri i fysiken. Elementa *41*, s. 1, 1958.

någon bild förklara vad vi menar med höger och vänster för en varelse, som inte visste detta. Man behöver endast be denna utföra försöket så att strålningen huvudsakligen kastas nedåt. Vrider han sig så i samma riktning som strömbärarna flyter, har han vridit sig åt höger.

Om paritetslagen gällt i sin hittillsvarande formulering, skulle β-strålningen utgått lika mycket uppåt som nedåt (*b*). Man skulle alltså då vid omkastad strömriktning få oförändrad strålningsfördelning (*c*). Detta skulle innebära symmetri mellan vänster och höger antydd genom det mellan *b* och *c* inlagda symmetriplanet. Så är inte fallet; med den i förhållande till *a* omkastade strömriktningen kastas strålningen huvudsakligen uppåt som i *d*. Fenomenet blir här inte i sin helhet speglat.

Man måste dock ställa frågan om paritetslagens ogiltighet möjligen beror på att de bestämmande försöksstorheterna i *d* inte är korrekt speglade från *a*. Avgörandet härav står i intimt samband med problem, som berör elementarpartiklarnas natur.

P. A. M. Diracs 1927 framförda teori för elementarpartiklar och motsvarande antipartiklar förutsätter en fullständig symmetri med avseende på den elektriska laddningen hos dessa. Varje slag av de på jorden vanliga elementarpartiklarna har en laddning med visst tecken, men mot dessa svarar antipartiklar med motsatt tecken. Mot den negativa elektronen svarar den positiva antielektronen eller, som den vanligen kallas, positronen. Mot den positiva protonen svarar den negativa antiprotonen. Vi kan också tänka oss en antivärld, där våra vanliga elementarpartiklar genomgående motsvaras av antipartiklar. Eftersom en elementarpartikel och motsvarande antipartikel vid sammanträffande förintas under energiutveckling, måste en sådan antivärld, om den överhuvudtaget existerar, befinna sig på mycket stort avstånd från vår värld.

De nya erfarenheterna visar nu bestämt att en elementarpartikel i vissa avseenden uppför sig som om den vore asymmetrisk. Man skulle kunna säga att elementarpartikeln i sådana avseenden uppför sig som en skruv med bestämd skruvriktning. Motsvarande antipartiklar har i samma avseenden den motsatta skruvriktningen. Uppför sig t. ex. elektronen som en vänsterskruv, måste positronen uppföra sig som en högerskruv. Eftersom en spegling kastar om en skruvs skruvriktning, måste den också överföra en elementarpartikel i motsvarande antipartikel och tvärtom.

Lees och Yangs försök måste nu tolkas med hänsyn till detta och det visar sig då att en fullständig spegling inte utförts. Den elektriska strömmen i trådslingan i *a* blev sålunda inte speglad endast genom att dess omloppsriktning speglades. En fullständig spegling skulle tyd-

ligen dessutom krävt att strömbärarna, elektronerna, skulle överförts till positroner. Försöket kan visserligen inte utföras på detta sätt (härför skulle krävas ett laboratorium i en antivärld), men man är övertygad om att det skulle visa paritetslagens giltighet. Man skulle få fallet *e*, vilket är spegelbilden till *a* (även strålningen består här av positroner).

Det nyssnämnda klarläggandet av riktningarna vänster-höger förutsätter givetvis att den främmande varelsen har samma strömbärare i magnetspolen som vi. Men om han lever i en antivärld, kommer hans elektriska ström att bestå av positiva elektroner, positroner, i stället för våra negativa elektroner. Låter han denna positronström cirkulera så, att strålningen huvudsakligen kastas nedåt, får han säkerligen resultatet *e*, dvs. han skulle vrida sig åt vänster när vi avsåg höger. Så länge vi inte vet om främlingen lever i en antivärld eller ej kvarstår alltså svårigheten att för honom klargöra riktningarna vänster-höger.

Det sagda visar att paritetslagen med största sannolikhet gäller generellt så snart varje spegling utförs fullständigt, vilket fordrar att varje elementarpartikel överförs i motsvarande antipartikel och tvärtom. Underlåts denna ändring av partikelnaturen, kommer paritetslagen att ändå gälla i de flesta fall, men en del förlopp (vilka, såsom är fallet vid Lees och Yangs försök, innebär medverkan av vissa mycket svaga krafter mellan elementarpartiklar) är tydligen tillräckligt känsliga för att då visa en avvikelse från lagen. Vår värld, skild från antivärlden, gör alltså vid sådana förlopp skillnad på vänster och höger, dvs. är asymmetrisk. Det är då principiellt möjligt att medverkan av något förlopp av detta slag vid livets uppkomst kan vara orsak till att blott ett av de två möjliga asymmetriska kemiska systemen är företrätt hos organismerna på vår jord.

För sina undersökningar över paritetslagen och för de därav föranledda upptäckterna rörande elementarpartiklarnas natur erhöll Lee och Yang 1957 års nobelpris i fysik.

Fotografiska försök som kan utföras i dagsljus

Av läroverksadj. Ivar Stål, Saltsjöbaden

Ett fotopapper tas ut ur förpackningen och får ligga någon minut i dagsljus. Vanligt klorbrom-silverpapper för förstoringsarbeten är lämpligt. Papperet blir vanligen svagt grått eller violett på grund av fotolys. Klipp en ca 3 cm bred remsa av papperet och doppa den till hälften av dess längd i en lösning av ett reduktionsmedel, en *framkallare*. Denna skall vara rätt starkt alkalisk, men sammansättningen f. ö. behöver för dessa försök inte vara noga bestämd. Man kan ta 1 tesked hydrokinon och 1 tesked natriumsulfit jämte 15 ml 2-n NaOH till 150 ml vatten; om man tar »bisulfit» eller »pyrosulfit» bör man ta dubbelt så mycket NaOH. Den nerdoppade delen av remsan blir snabbt mörk, nästan svart av utreducerat silver. Skölj den i vatten.

Doppa nu den andra ändan av remsan till ungefär en fjärdedel av längden i ett *fixerbad:* 2 teskedar natriumtiosulfat till 150 ml vatten. Därvid löses silversalterna upp, och papperet ljusnar. Skölj åter i vatten. Doppa slutligen hälften av den svarta delen av remsan i ett oxidationsmedel, en *försvagare*, t. ex. lösning av kaliumdikromat, kaliumpermanganat eller rött blodlutsalt + något konc. saltsyra. Det behandlade partiet ljusnar, eftersom silvret oxideras till silverjon. På remsan har man nu fyra områden, i ordning svarande mot: 1) den fixerade bilden (silversalterna borta), 2) den »latenta» bilden (av ljuset påverkat silversalt), 3) den framkallade bilden och 4) den försvagade bilden. Den senare kan återställas med hjälp av framkallare, så att ett 5:e område erhålles.

En roande variant är att inte doppa det belysta papperet i framkallaren utan att i stället med en mjuk pensel med framkallaren måla ett »fotografi» på papperet! Retuschering av alltför kraftigt framträdande delar av »fotografiet» kan ske med målning med försvagaren. Det kan rekommenderas att pröva olika papper och att variera sammansättningen av lösningarna.

Fotolysfenomenet ger en möjlighet att framställa en fotografisk bild utan framkallning. Man kan göra trevliga skuggbilder, »snabbkopiera» en film, ja till och med reflexkopiera. Ljuskälla: direkt solljus, kvartslampa eller fotolampa. Bilden är hållbar utan fixering i flera år, om den förvaras i mörker och inte utsätts för direkt solljus vid betraktandet.

Beträffande teorin se t. ex. Boström, Fotografisk kemi, Stockholm 1956, anm. i Elementa *41*, 75, 1958.

Viktstitrering

Av lektor G. Starck, Stockholm

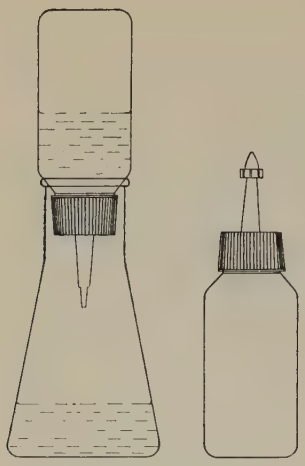
Viktstitrering betyder, att båda eller endera av de båda lösningar, som vid en titrering reagerar med varandra, vägs i stället för att volymmätas. Vid en vanlig titrering erhålles de åtgångna mängderna ur differensen mellan delstrecken på ett i ml och underavdelningar graderat mätkärl, vartill även pipetten kan räknas, och lösningens halt måste vara angiven i moler (ev. ekvivalenter) pr liter lösning. Vid en viktstitrering fås de åtgångna mängderna ur differensen mellan två vikter, och lösningens halt måste vara angiven i moler (ev. ekvivalenter) pr 1000 g lösning. En principiell överlägsenhet har viktstitreringen jämförd med volymstitreringen, nämligen den att den gör oss oberoende av temperaturen hos lösningar och mätkärl.

Vid viktstitrering ersättes pipetten och byretten av en våg och två kärl, som skall kunna avlämna de båda lösningarna på ett bekvämt sätt och som passar på en vågskål. Det har föreslagits att använda pipetter av typen injektionsspruta (J. M. Thoburn, J. Chem. Educ. *36*, 616, 1959); de överträffas emellertid enligt min mening av de kärl av polyeten eller »polva», som numera tillverkas i en mångfald olika modeller för skiftande ändamål. Ett lämpligt kärl är en flaska om 50 ml försedd med spetsuttag. Den lämnar vätska genom att i omvänd ställning tryckas ihop; den passar också precis i en 100 ml titrerkolv (se fig.). Dess pris är 70 öre.

Den ena lösningen, L1, varpå man titrerar har i vanliga fall en bestämd, på förhand vald volym, avmätt med vollpipett eller, mindre noggrant, i mätcylinder. Den andra lösningen, L2, varmed man titrerar, förvaras i byrett; den åtgångna volymen, som är på förhand obekant, kan avläsas på byrettens gradering.

Bägge dessa mätkärl, pipetten och byretten, ersätts vid viktstitrering av de två nämnda polvaflaskorna och en enkel laborationsvåg. Flaskorna vägs före och efter försöket; ur viktsdifferenserna erhålles förhållandet mellan de reagerande ämnenas mängder i moler eller ekvivalenter under förutsättning, att lösningarnas koncentrationer är angivna i antal moler (ekvivalenter) pr 1000 g lösning.

Mot denna konsekvent genomförda viktstitrering kan anföras, att man inte på förhand kan bestämma mängden av L1. Man kan naturligtsvis väga flaskan fylld med L1, taga bort t. ex. 25 g från vågskålen och tömma ut så mycket av lösningen, att flaskan blir ungefär 25 g lättare. Att ställa in på noga 25 g torde vara ogörligt, i varje fall



mycket tidsödande. Ett sådant förfarande är uteslutet.

Jag föredrar en kombination av volyms- och viktstitrering, som behåller pipetten för avmätning av L1 men ersätter byretten med en plastflaska, innehållande L2. Koncentrationen av L1 skall vara angiven på vanligt sätt i molaritet eller normalitet, L2 i moler eller ekvivalenter pr 1000 g lösning. Jag erinrar om att detta sätt att arbeta är det enda möjliga, när L1 utom det ämne som skall bestämmas innehåller andra ämnen i obestämd och okontrollerbar mängd, t. ex. lösningen av en metall i HNO_3 eller H_2SO_4, ur KJ frigjord jod m. fl.

Lösning 2 skulle man således egentligen bereda genom att lösa en viss viktsmängd, *a* g, substans i (1000—*a*) g rent vatten eller något annat rent lösningsmedel (noggrannhet 0,1 %). Men detta låter sig inte göra annat än i ett litet antal fall och med analysrena preparat, t. ex. $Na_2C_2O_4$, $AgNO_3$, NaCl, däremot ej med $Na_2S_2O_3$, NaOH, KOH, NH_3, alla syror, alla ämnen som fordrar medverkan av främmande ämnen för att lösas, t. ex. jod i kaliumjodid m. fl. I alla dessa fall kan man ställa L2 genom viktstitrering mot en lösning av känd molaritet, men man kan också för lösningar av ett enda ämne använda sådana av känd molaritet (normalitet) och med kännedom om lösningarnas täthet omräkna halten i moler pr 1000 g lösning. Man arbetar i regel med svaga 0,1 molara lösningar, vilkas täthet endast obetydligt skiljer sig från 1, som nedanstående tabell visar.

	Molaritet	$d\frac{20}{4}$	Moler pr 1000 g lösn.
NaOH	1	1,041	0,9607
	0,5	1,020	0,4898
	0,1	1,004	0,09961
KOH	1	1,048	0,9541
	0,5	1,024	0,4883
	0,1	1,004	0,9961
NH_3	1	0,9907	1,009
	0,5	0,9961	0,5020
	0,1	1,000	0,1000

HCl	1	1,016	0,9842
	0,5	1,007	0,4965
	0,1	1,001	0,09999
HNO_3	1	1,031	0,9701
	0,5	1,016	0,4921
	0,1	1,002	0,09979
H_2SO_4	0,5	1,030	0,4855
	0,25	1,015	0,2462
	0,05	1,003	0,04991
HAc	1	1,007	0,9929
	0,5	1,003	0,4985
	0,1	0,999	0,1001
NaCl	1	1,039	0,9825
	0,5	1,019	0,4907
	0,1	1,003	0,09970
KCNS	0,1	1,004	0,09980
$Na_2C_2O_4$	0,05	1,004	0,04981
$AgNO_3$	0,1	1,013	0,09872
Tiosulfat	0,1	1,011	0,0989
$KMnO_4$	0,1 N	1,002	0,09999 ekv./1000 g

För de vanligen använda lösningarna, 0,1-molara och därunder, är korrektionsfaktorn mycket nära 1. Undantag utgör lösningarna av $AgNO_3$ och av tiosulfat.

Om sålunda viktstitreringar upptas på laborationsprogrammet, sporadiskt eller genomgående, så bör för varje standard- eller normallösning på etiketten anges såväl molaritet som antal moler per 1000 g lösning.

Noggrannheten vid en byrettavläsning torde i skolan få sättas vid 0,1 ml. Men 0,1 ml lösning väger 0,1 g; det är således tillräckligt att väga titrerflaskan med denna noggrannhet. Vägningen kommer därför att kunna göras mycket snabbt.

Vilka fördelar erbjuder nu en viktstitrering, jämförd med volymstitreringen?

1. Som redan sagts gör oss viktstitreringen oberoende av lösningarnas temperatur, som vid en volymstitrering bör vara den vid vilken mätkärlen är korrekta.
2. Byretter, även s. k. handelsvara, är relativt dyra instrument; de måste liksom även pipetter vara alldeles rena och fettfria på insidan, så att lösningen lämnar glasväggen på ett tillfredsställande sätt.

3. En stor och kanske psykologiskt betydelsefull fördel hos viktstitreringen ligger däri att slutresultatet är fullständigt fördolt före den andra vägningen, dessförinnan kan man inte veta om resultatet är »rätt» eller ej. Varje kemilärare torde vara förtrogen med att laborationsgrupperna under titreringens gång jämför sina byrettavläsningar och frestas jämka på dem till god överensstämmelse med flertalets värden. Ett sådant arbetssätt är så gott som uteslutet vid en viktstitrering.

Här nedan återges några titreringar, som jag har utfört för att pröva metodiken.

1. 25 ml 0,500 N H_2SO_4 neutraliserades av $\begin{cases} 12{,}37 \text{ ml NaOH} \\ 12{,}8 \text{ g } \text{»} \end{cases}$
   Natriumhydroxiden är tydligen 1 M och dess täthet 1,0411.
   12,8 g motsvarar 12,8/1,0411 = 12,3 ml NaOH.
2. Permanganattitrering.
   15 ml 0,1908 N $Na_2C_2O_4$ oxiderades av $\begin{cases} 26{,}7 \text{ ml } KMnO_4 \\ 26{,}6 \text{ g } \text{»} \end{cases}$ = 26,6 ml
3. Tiosulfattitrering.
   15 ml jodlösning avfärgades av $\begin{cases} 14{,}94 \text{ ml 0,1 N tiosulfat} \\ 15{,}1 \text{ g } \text{»} \text{ } \text{»} \end{cases}$
   15,1 g tiosulfat = 15,1/1,0113 = 14,9 ml tiosulfat.
4. 40 ml 1/3 M H_3PO_4 titrerades med 1 M NaOH.
   13,2 g NaOH-lösn. gav omslag med metylorange (= NaH_2PO_4),
   26,7 g » » » » » fenolftalein (= Na_2HPO_4).

Aktuellt

Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning

höll ordinarie årsmöte på fysikinstitutionen vid Vasa högre allm. läroverk i Göteborg söndagen den 30 oktober 1960.

Årsberättelse och revisionsberättelse föredrogs och godkändes av årsmötet. Av redogörelserna framgick att föreningen under det gångna arbetsåret kraftigt ökat sitt medlemsantal. En bidragande orsak härtill torde vara att föreningens ekonomi tack vare en frikostig donation är tillfredsställande. Därigenom har föreningen under året kunnat utge stencilerade föreläsningsreferat från den kurs i mängdlära, som anordnades våren 1960. Föreningen har under året även utgivit en tryckt medlemsförteckning. Det meddelades att föreningens första tryckta publikation föreligger i korrektur och med det snaraste kom-

mer att utsändas till medlemmarna. Innevarande termin anordnar föreningen i samarbete med Göteborgs skolstyrelse en lärarkurs i elementär geometri. Kursledare är lektor Bertil Nyman och adjunkt John Amundsson. Föreningen räknar med att stencilerade referat av de föreläsningar som hålles under denna kurs skall kunna tillställas samtliga medlemmar.

Till ordförande i föreningen omvaldes rektor Arne Pleijel, Trollhättan. Styrelsen fick följande sammansättning: adj. John Amundsson och prof. Harald Bergström, Göteborg, adj. Emmy af Forselles-Dahle, Borås, lektor Karl Erik Forsman, Alingsås, rektor Sten Friberg, Göteborg, lektor Ragnar Gedell, Vänersborg, lektor Per Häggmark och adj. Svante Landberg, Göteborg, laborator Ido Leden, Lund, adj. Ilmar Melin, prof. Nils Ryde, lektor Karl Sjögren och docent Eve Staffansson, Göteborg, samt rektor Gösta Weister, Kristinehamn.

Efter årsmötesförhandlingarna höll undervisningsrådet Carl-Erik Sjöstedt föredrag över ämnet »Aktuella problem i matematikundervisningen».

Per Häggmark

Fysikdagar för gymnasieelever

Svenska Fysikersamfundet och Sveriges Mekanförbund arrangerade den 3 och 4 november de första »Fysikdagarna» för gymnasieelever på Tekniska Museet i Stockholm. Ett 70-tal läroverk hade inbjudits att utse en stipendiat med intresse och fallenhet för ämnet fysik, och de utvalda eleverna fick av arrangörerna fri resa till Stockholm och fritt uppehälle där.

Det var ett förnämligt program, som serverades gymnasisterna. Intendent Torsten Althin talade på sitt medryckande och humoristiska sätt om de Laval och dennes uppfinningar och idéer, såsom de framträder i hans efterlämnade anteckningar. Tekn. dr Ingvar Jung gav sedan en intressant skildring av en forskares detektivarbete, då han har att leta fram orsaken till att en konstruktion inte håller för påfrestningar som man teoretiskt inte kunnat förutsäga. I det exempel han drog fram var det en turbins egensvängningar, som spelat konstruktörerna ett spratt.

Under första dagen fick programmet ett extra aktuellt inslag, då årets nobelpristagare i fysik just hade utsetts. I anslutning härtill gav professor Per Ohlin en elegant presentation av den belönade konstruktionen av bubbelkammaren. Professor Ohlin föreläste sedan om fasta kroppars fysik och utförde därvid också ett elegant försök med termoelement.

Den andra dagen inleddes med ett föredrag om den moderna fysikens världsbild, och arrangörerna hade därvid lyckats få professor Oskar Klein att ge en exposé över materiens byggnad. I ett spirituellt

föredrag, som fångade gymnasisternas intresse, berättade han om materiens olika »byggstenar». Siste föreläsare var professor Hannes Alfvén, som talade om plasma. På ett pedagogiskt föredömligt sätt redogjorde han för vad som menas med ett plasma och för plasmafysikens aktuella forskningsområde, varvid han också kom in på de forskningsresultat, som gjort professor Alfvéns namn internationellt berömt.

I programmet ingick också en demonstration av Tekniska museets atomarium, där laborator Wilner med sedvanlig elegans visade en serie försök för att ge lite realitet åt de teorier föredragshållarna uppehållit sig vid. Vidare besöktes AB Atomenergis atomreaktor i Stockholm, intendent Althin förevisade Museets maskinhall, Sveriges Radio-TV visade de tekniska arrangemangen kring en TV-sändning. Programmet avslutades på AGA, som visade sin demonstrationshall och sin färg-TV-anläggning. Mekanförbundets ordförande, direktör Gunnar Dalén, avslutade programmet med att berätta om Gustaf Dalén och om den storindustri han startade och som utvecklats till AGA av idag.

De deltagande gymnasisternas intresse för föredragen och demonstrationerna var påtagligt stort, och man hoppas livligt att Svenska Fysikersamfundet och Sveriges Mekanförbund skall kunna fullfölja sin föresats att låta Fysikdagarna bli ett årligen återkommande arrangemang, till främjande av studier i och intresse för de naturvetenskapliga ämnena. *Jan Unenge*

Bokanmälningar

Anthony Ralston/Herbert S. Wilf (Editors), *Mathematical Methods for Digital Computers.* Wiley & Sons, New York/London, 1960. Pp. 293+xi, $ 9.00.

I föreliggande utmärkta bok ha de viktigaste matematiska metoderna inom den moderna databehandlingstekniken samlats i 26 kapitel, skrivna av 24 olika författare. Bland kapitlen märkas: Elementära funktioner, matriskalkyl, ordinära differentialekvationer, partiella differentialekvationer och statistik. Den matematiska behandlingen är stundtals något knapphändig, vilket avhjälpes genom att många litteraturhänvisningar givas. Tonvikten har i stället lagts på att meddela fullständiga räkneplaner, uppskattningar av räknetider och allt annat sådant, som en kodare behöver veta. Uppenbarligen har ett stort arbete nedlagts på boken, och resultatet har också blivit en mycket användbar bok. Som vanligt när det gäller en bok från John Wiley & Sons, är typografien och utstyrseln trevliga. *Hans Riesel*

D. F. Lawden, *A Course in Applied Mathematics.* The English Universities Press, London, 1960. Pp. 655, 70s. net.

Detta verk behandlar principerna för den teoretiska makrofysiken, med undantag för termodynamik och relativitetsteori. Den innefattar sålunda partiklars och stela kroppars mekanik (295 s.), deformabla kroppars mekanik (152 s.) och elektromagnetism (202 s.).

Framställningen tillfredsställer alla rimliga krav på skärpa och är mycket överskådlig och klar. Bevisföringar och argument är utförda med stor fullständighet, men med en tilltalande knapphet och koncentration i stilen. Vektorbeteckningar och vektorteknik användes systematiskt. Texten beledsagas av ca 180 i detalj utförda exempel och över 500 övningsuppgifter med svar, till stor del utgörande tentamensuppgifter från olika brittiska universitet.

Verket uppnår otvivelaktigt en hög lärobokstandard och kan livligt rekommenderas både som kursbok och för självstudier.

Stig Hjalmars

Ivan Niven/Herbert S. Zuckerman, *An Introduction to the Theory of Numbers.* Wiley & Sons, New York/London, 1960. Pp. 250, $ 6,25.

Boken inledes med de traditionella satserna om primtal och tals divisorer. Längre fram ges formlerna för Eulers φ-funktion samt antalet och summan av ett tals divisorer. I ett senare avsnitt ingår även problemet om antalet primtal under en viss gräns. I ett par kapitel behandlas kongruenser och kvadratiska rester med Legendres och Jacobis symboler och reciprocitetssatsen. Ett kapitel ägnas åt diofantiska ekvationer av första och högre grad samt kvadratiska former. Bl. a. behandlas även ett tals uppdelning i en summa av högst 53 bikvadrater samt ekvationen $ax^2+by^2+cz^2=0$. Sedan följer ett par kapitel om Farey-bråk och kedjebråk med tillämpning på Pells ekvation. Ett kapitel behandlar algebraiska talkroppar (number fields) och speciellt kvadratiska talkroppar med deras enheter och primtal. De båda sista kapitlen ägnas åt mera speciella problem. I det ena gäller det antalet uppdelningar av ett tal i en summa av termer. I samband därmed införes genererande funktioner. I det andra frågas efter »tätheten» hos oändliga talserier.

Framställningen är lättfattlig och långsamt fortskridande, så att även den mest otränade matematiker har lätt att följa densamma. Längre fram blir den visserligen något mera åtstramad men vållar ej några svårigheter. Värdefullt är att stundom, då bevis skulle bli för besvärliga, likväl en utblick ges över hur långt man kommit t. ex. i fråga om Warings problem. Antalet övningsexempel överstiger 500.

Agne Wahlgren

Mark Kac, *Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory.* John Wiley and Sons, New York, 1959. Pp. 93, $ 3.00.

Denna prydliga lilla bok ingår i serien Carus Mathematical Monographs, som utges av Mathematical Association of America. Den består av tre till synes disparata delar. Den första (52 sidor) behandlar stora talens lag och centrala gränsvärdessatsen för en serie myntkast Släktskapen mellan dylika serier och binärutvecklingen $\Sigma \varepsilon_\nu(t)\, 2^{-\nu}$ ($\varepsilon_\nu = 0, 1$) av ett tal t ($0 \leqq t \leqq 1$) diskuteras och ger nya aspekter på välkända förhållanden. Den andra delen (27 sidor) ägnas åt analytisk talteori, främst åt Eulers φ-funktion och åt nyare gränsvärdessatser av Rényi, Erdös, Kac, m. fl., rörande antalet primtalsdivisorer. Tredje delen (14 sidor) innehåller litet ergodteori i anslutning till den kinetiska gasteorien.

De tre delarna knyts samman av begreppet statistiskt oberoende, som Kac vill rädda från det oförtjänta ödet att bli »bortabstraherat» av sannolikhetsteoretikerna. Författaren lyckas utmärkt med sitt uppsåt, ty läsaren lägger boken ifrån sig efter slutad läsning nöjd med det eleganta framställningssättet och med en fördjupad förståelse för oberoende-definitionens betydelse på olika områden.

Gunnar Blom

I. H. Rose, *A Modern Introduction to College Mathematics.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1959. Pp. 530, $ 6.50.

Detta är en okonventionellt och elegant skriven elementär inledning till matematiken. Förf. har väl lyckats genomföra sin i förordet deklarerade avsikt att skriva en lärobok, som dels ger inlevelse i matematikens tankevärld och historia och dels utgör en stringent utgångspunkt för fortsatta studier.

Boken är indelad i tre avsnitt. I det första behandlas grundläggande matematiska begrepp som mängder, mängdoperationer, en-entydiga avbildningar mellan mängder, relationer och funktioner, binära operationer m. m. Vidare ges här en axiomatisk teori för de reella talen samt en inledning till den analytiska geometrin och trigonometrin. Här använder förf. bland annat ett avståndsaxiom. I bokens andra avsnitt ges en fullständigare framställning av den analytiska geometrin och trigonometrin. Det sista avsnittet slutligen innehåller en kort inledning till analysen samt elementen av sannolikhetskalkylen och den deskriptiva statistiken. Statistisk inferens berörs kortfattat i en paragraf med titel »Beslut och planering».

Boken kan varmt rekommenderas som en modernt skriven lärobok för gymnasiestadiet.

Lennart Råde

A. O. Gelfond, *The Solution of Equations in Integers.* P. Noordhoff, Groningen, 1960. Pp. 72, $ 1.00.

Denna lilla bok är en översättning av den ryska upplagan och utgiven för amerikansk publik under serierubriken »Popular lectures on mathematics». Den är en trevlig monografi, som ger en god bild av de viktigaste lösningsmetoderna, men den går endast på enstaka punkter utöver vad som t. ex. kan inhämtas i Nagells Elementär talteori.

Boken behandlar metoder att bestämma heltalslösningar till algebraiska ekvationer med heltalskoefficienter, och dess huvudavsnitt ägnas ekvationer av första och andra graden med två obekanta, de enda fall (bortsett från det nästan triviala med en obekant), som allmänt kan lösas. Framställningen är mycket elementär och förutsätter t. ex. ingen som helst kännedom om kongruenser. Lösningar bestämmas med hjälp av kedjebråk, men Eulers metod att på så sätt lösa Pells ekvation $x^2-Ay^2=1$ i allmänna fallet slutföres ej med bevis. Hänvisningar till rysk litteratur ges i detta och andra fall.

Slutligen ges en antydan om Thues metod att bevisa, att vissa omfattande ekvationsklasser av högre grad än två endast kan ha ett ändligt antal lösningar och ges också instruktiva exempel på användning av Fermats »descente infinie». — En felaktighet har insmugit sig på sid. 58, där det påstås att Delone (Delaunay) har visat, att ekvationen $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=1$ högst kan ha fem lösningar. Beviset gäller endast för fallet att den kubiska formen har negativ diskriminant. Så t. ex. kan man ganska lätt finna inte mindre än nio lösningar till ekvationen $x^3+3x^2y-4xy^2+y^3=1$. *Ove Hemer*

H. P. Wilkens, *Moon Maps.* Faber, London, 1960. Pp. 38+27 maps, 30s.

Föreliggande atlas återger vad som måste anses vara den nyligen avlidne framstående engelske selenografen H. P. Wilkens livsverk: den största och mest detaljerade ritade månkarta som någonsin framställts, upptagande ca 90 000 objekt. Originalkartan, som har en diameter av 7,5 m, har liksom i ett par tidigare utgåvor uppdelats i 25 sektioner. I den nu utgivna versionen av kartan är kartbladens storlek 20×20 cm och skalan sådan att 1 cm på kartan motsvarar 35 km vid månskivans centrum. Vissa revideringar har företagits i förhållande till de tidigare utgåvorna, och dessutom har två nya kartblad tillagts, nämligen ett som visar vallslätten Ptolemeus i större skala och ett som återger månens från oss vända sida enligt de fotografier som upptogs med den ryska interplanetariska stationen Lunik III.

De namngivna formationerna, omkring 800 stycken, beskrives kortfattat i en alfabetisk förteckning. För att underlätta studiet av atlasen och öka dess användbarhet vid direkta observationer har kartor och

text bundits i separata ringar, så att man kan ha vilken som helst textsida och karta uppslagna samtidigt. Denna utgåva av Wilkens atlas, som speciellt framställts för den observerande månforskaren, kommer med all säkerhet att välkomnas av många, även om rikedomen på detaljer vid första påseendet kan göra ett förvirrat intryck.

Gunnar Larsson-Leander

J. C. Pecker/E. Schatzman, *Astrophysique générale.* Masson et Cie, Paris, 1959, X+756 p., 12 000 fr.

Författarna till föreliggande bok, två av Frankrikes mest framstående unga astrofysiker, säger i sitt förord att deras bok avser att söka fylla luckan mellan de mer eller mindre populära framställningarna av astrofysiken och de ultraspecialiserade monografierna över olika delar av denna vetenskap. Den vänder sig inte bara till studerande utan även till unga forskare, som »tidigt har den ofta svåra uppgiften att våga sig in i den snårskog som specialtidskrifterna utgör».

Boken indelas med ett 100 sidor långt avsnitt om de grundläggande fysikaliska begreppen och teorierna. Här behandlas elementen av statistiken, mekanik och hydrodynamik, teorien för atom- och molekylspektra samt strålningsteori. Det är givet att detta avsnitt ej utgör någon fullständig framställning av de delar av den teoretiska fysiken som har speciell tillämpning inom astrofysiken utan snarast får betraktas som ett repetitorium.

Nästa avsnitt, om 140 sidor, avhandlar instrument och observationsmetoder, såsom fotometri och spektralfotometri. Rätt utförliga diskussioner av olika instruments optiska egenskaper och beskrivningar av hjälpinstrument ingår.

Tredje avsnittet, om stjärnornas egenskaper, är med sina nära 220 sidor bokens mest omfattande. Här återfinnes redogörelser för den empiriska spektralklassifikationen och teoretisk behandling av stjärnatmosfärernas struktur. Mätningar av stjärnornas avstånd och bestämning av absoluta ljusstyrkor behandlas, dubbelstjärnor samt olika typer av variabla stjärnor beskrives i korthet. Stjärnornas inre byggnad diskuteras utförligt i avsnittets sista kapitel.

Bokens fjärde avsnitt, om närmare 160 sidor, har titeln »Stjärnsystem» och behandlar följaktligen galaxerna men därjämte även stjärnhopar och interstellär materie. I detta sammanhang diskuterar författarna även stjärnornas utveckling och kosmologiska problem.

Det femte och sista avsnittet slutligen, på något över 100 sidor, ägnas solsystemet och främst då solen som en typisk representant för en dvärgstjärna av spektraltypen G2. Solaktivitetens inflytande på olika terrestra fenomen behandlas rätt utförligt i ett kapitel, planeter, kometer och meteorer mer summariskt i ett annat.

Av ovanstående översikt av det huvudsakliga innehållet i Pecker och Schatzmans bok framgår att den verkligen är en allmän astrofysik och inte enbart en teoretisk sådan. Enligt anmälarens mening har författarna på ett utmärkt sätt lyckats i sin strävan att framställa ett mellanled mellan de elementära, huvudsakligen deskriptiva läroböckerna och den avancerade teoretiska litteraturen. Man vill livligt hoppas att boken, som är illustrerad med ett stort antal klargörande diagram och fotografier, skall komma till användning även i vårt lands trots svenska studerandes allt oftare demonstrerade motvilja mot franskspåkig litteratur. Till omfång motsvarar den närmast en trebetygskurs i astrofysik för fil. kand.- och ämbetsexamen.

Gunnar Larsson-Leander

Robert Bruce Lindsay, *Mechanical Radiation.* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York/Toronto/London, 1960. Pp. 415, 77s. 6d.

Det är ett välkänt förhållande, att 1800-talets fysiker före Maxwell sökt förklara de elektriska och optiska fenomenen analogivis med utgångspunkt från de mekaniska egenskaperna hos en hypotetisk elastisk ljuseter. När sedan elektricitetsläran jämsides med elektrotekniken genomlöpte sin storartade moderna utveckling, kom man att odla upp räknemetoder, som är användbara även på en mängd mekaniska problem. Detta är nog tyvärr mindre välkänt bland många, som borde kunna profitera av dessa räknemetoder, t. ex. de ingenjörer och forskare, som sysslar med mekaniska svängningsproblem, stötfortplantning, icke-stationära värmeledningsproblem, reologi, diffusion osv.

I föreliggande arbete tas de mekaniska problem, som rör vågfortplantning upp från enhetliga synpunkter, lätt igenkännliga från optiken och teorien för elektriska svängningar. På fyrahundra sidor har författaren lyckats komprimera ett synnerligen rikhaltigt material, inkluderande elastiska svängningar hos balkar, plattor, kontinuerliga medier och kristallgitter samt vätskevågor av olika slag. Energibegreppet står i centrum och den med vågrörelsen förbundna energitransporten studeras ur olika synpunkter. Inom vad som vanligen betecknas som akustik behandlas bl. a. stötvågor och elektroakustiska fenomen. Utblickar mot geofysikaliska tillämpningar ingår också. Även sådana högaktuella problem som svängningar hos plasma enligt Alfvéns magnetohydrodynamiska teori samt elektromekaniska analogier i anslutning till det mekaniska impedansbegreppet har fått plats. Innehållet har emellertid blott kunnat flyktigt antydas. Det bör alltså framgå, att det rör sig om en tämligen bastant anrättning, som knappast kan tillrådas för ett första studium av ämnesområdet, men däremot bör kunna skänka den mera försigkomne en värdefull överblick över ett aktuellt gränsområde. *Folke K. G. Odqvist*

Fracture, Proceedings of an international conference on the atomic mechanism of fracture held in Swampscott, Mass., April 1959. Editors: B. L. Averbach, D. K. Felbeck, G. T. Hahn, D. A. Thomas. Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1960. Pp. 646, $ 17.50.

Vid den nämnda konferensen hade samlats ett trettiotal inbjudna forskare från den västliga världen, alla välrenommerade inom det behandlade området. Författarna har lämnats fria händer inom sina specialområden. Genomläsning av deras bidrag inklusive anslutande diskussioner ger möjligen i första hand ett förvirrande intryck. För att underlätta läsningen har man emellertid sammanfört behållningen av mötet genom tre generalrapportörer, som var för sig behandlat ett huvudtema, nämligen: Sprödbrott, Utmattning och segt brott, Krypbrott. Genom dessa utmärkta referat blir det möjligt att urskilja vad man vid diskussionerna kunnat enas om, vad som förblivit kontroversiellt och sådana spörsmål på vilka den framtida forskningen särskilt bör inriktas. När sålunda dr Orowan, en av föregångsmännen på sprödbrottsforskningens område, ställde frågan: vad är det för fel med den klassiska föreställningen att sprödbrott uppkommer vid den påkänning, då spänningstöjningskurvan skär kurvan för deformationslöst brott, fick han till svar, att vi måste kunna återföra de nämnda kurvorna på mera fundamentala egenskaper hos materialet, ja, rent av på den atomära strukturen och kvantitativt härleda brottegenskaperna ur fysikaliska egenskaper mätta på annat sätt och med utnyttjande av andra fysikaliska fenomen. Det är här dislokationsbegreppet kommer in och det är signifikativt att just dr Orowan är en av de forskare, som infört dislokationsbegreppet — fastän för att förklara andra egenskaper hos de fasta kropparna än sprödbrott. Man synes vara i stort sett enig om att en brottspricka uppkommer, som följd av ansamling av dislokationer, som genom en ännu ej fullt klarlagd mekanism övergår i en kavitet, som bildar ursprunget till sprickan. Här spelar enligt Griffith den för bildande av kaviteten erforderliga ytenergien en fundamental roll. Man rör sig tills vidare blott med storleksordningar och är långt från den kvantitativa behärskning av fenomenet, som generalrapportören angav som slutmål. I olika temperaturområden är vissa typer av plastisk deformation väsentliga, t. ex. tvillingbildning vid järn och stål, som där förekommer under den s. k. omslagstemperaturen då segt brott övergår till sprött. En intressant fråga av fundamental betydelse för sprödbrottsfrågan är den av Cottrell framförda hypotesen att spänningstöjningskurvan hos sprödbrottbenäget material måste ha en fallande del som hos mjukt stål. Frågan blev dock aldrig fullt entydigt besvarad. I centrum för studiet av utmattningssprickornas uppkomst

står nu »intrusions» och »extrusions», dvs. långa band av några atomplans tjocklek som likt groddar skjuter ut ur eller in i den fria ytan hos en kristall, som utsättes för upprepade påkänningar. I samband med krypbrott har detaljerade iakttagelser gjorts om betydelsen av korngränsdeformation och tendensen hos korngränserna att förskjutas till motverkande av interkristallina brott. Kemiska inflytelser diskuteras. Slutligen förekommer uppsatser, där Griffiths sprickteori visas vara användbar även på polymerer och konsthartser. — I allt innehåller den vackra men dyra boken en myckenhet läsvärt stoff och många intressanta bilder att begrunda, icke minst elektronmikroskopiska bilder av kristallstrukturer med och utan dislokationer och »extrusions».

Även den som icke vågar dela generalrapportörens optimism om våra framtida möjligheter att genom myllret av gjorda iakttagelser nå fram till kvantitativa beräkningar av hållfasthetsegenskaper på atomär grund kan ej undgå att imponeras av fylligheten i de gjorda iakttagelserna och den teknik, som ligger bakom dem, ävensom av det skarpsinne, som presterats, då man lyckats dra sina långtgående slutsatser och se djupt in i naturens hemligheter. En mera pessimistisk grundsyn framfördes för en del år sedan av en finländsk kollega vid en doktorsdisputation på Teknis: Kan det inte vara så med brottfenomenen, som då man dyker i havet? Ju djupare man kommer desto mörkare blir det. Man lär heller knappast kunna komma ifrån makromekaniska formuleringar, om man skall tillämpa sina teorier vid ingenjörsmässiga hållfasthetsberäkningar. Där kunskapen brister, brukar man få anlägga statistiska betraktelsesätt. Dylika lyser nästan helt med sin frånvaro i det föreliggande arbetet men lär knappast kunna undgås i fortsättningen. I övrigt kan boken varmt rekommenderas till den, som vill orientera sig om dagsläget ifråga om uppkomsten av brottsprickor. *Folke K. G. Odqvist*

Axel Corlin, *Revolt mot likheten.* Världsåskådning i historisk och modern fysikalisk belysning. Natur och Kultur, Stockholm, 1959. 183 s., kr. 11:50.

Arvet från den grekiska antiken har varit av stor betydelse för utvecklingen av den västerländska kulturen. Detta gäller inte minst beträffande utformningen av den naturvetenskapliga världsbilden. Med hänsyn till vetenskapernas stora framsteg, särskilt under det sista århundradet, skulle väl de flesta anse, att arvet från Grekland varit i hög grad utvecklingsdugligt. Kritik har givetvis inte saknats, men det är dock påfallande många av vår tids främsta fysiker, som uppger sig ha verksamt inspirerats av än den ene än den andre av antikens filosofer.

I sin undersökning av döda och levande kulturer på vår jord är det särskilt två egenskaper, som intresserar bokens förf., nämligen i vilken grad idéinnehållet kan anses vara statiskt eller dynamiskt, och han har därvid kommit fram till en annan uppfattning än vad som här inledningsvis anförts. Den dynamiska världsåskådningen finner han hos en del nomadiserande stammar i forntid och nutid samt hos de levande högkulturerna i Kina, Indien och i den islamitiska världen, medan de döda högkulturerna i Babylon, Egypten, Kreta och Grekland utmärkes av en statisk åskådning.

Om man försöker utveckla en för rationellt förstånd anpassad beskrivning av naturen, riskerar man att hamna i en statisk världsåskådning. Med en dynamisk grundåskådning lägger man större vikt vid irrationaliteten hos verkligheten. Grundinställningen i grekiskt och som följd därav i många hänseenden fortfarande i västerländskt tänkande är statisk. »Grekerna levde och dog i den fasta övertygelsen att världen i alla fall ytterst måste var en skön, statisk harmoni.» Det har inte varit lätt att frigöra sig från den grekiska statiken. Det dröjde sålunda två tusen år innan vi kunde visa, att Aristoteles' läror om kroppars strävan till vila och om den slutna, likformiga cirkelrörelsen var felaktig. Grekerna avskydde irrationella mätetal och sökte med hjälp av rationella approximationer »måttfullt lösa tillvarons gåtor». »Meden agan; Gnothi seavton.» (»Ej för mycket; Känn dig själv.») löd inskriften på Apollotemplet i Delphi. Herakleitos' uttalande »Man kan ej två gånger stiga ner i samma flod» är en avvikelse från den statiska livssynen, medan däremot Parmenides' lära om »varat» hade en statisk förankring, som var så fast, att den senare förde eleaternas tankesystem in i de inre motsägelser, som så uttrycksfullt behandlats i Zenons paradoxer. Platon ansåg sin tankes verksamhet som det enda verkliga i stället för »verklighetens dynamiska faktum».

Förf. anser, att nutida fysik mera närmar sig gammal indisk, dynamisk uppfattning av verkligheten än till grekernas statiska. I den indiska vishetsläran spelar karma-tanken en stor roll. Med karma menas att varje gärning ger upphov till en efterföljande. De sprider sig som ringar på vatten och påverkar omgivningen, vilken reagerar med vänskap eller fiendskap allt efter gärningarnas beskaffenhet. Varje verkan får härigenom sin återverkan, och en parallell härtill finner förf. i det kända samspelet mellan observatören och objektet i den moderna atomfysiken. »I vår tid gör japaner, kineser, indier och orientaler, vilka ej är belastade med vårt statiska synsätt, allt viktigare insatser i den fysikaliska forskningen.» Detta är en åsikt som även Heisenberg framfört i sin bok »Den nya fysiken och filosofien».

Det måste dock framhållas, att Heisenberg i sin bok »Fysik og humanisme» i motsats till förf:s uppfattning betraktar det som en stor förmån att han i sin ungdom fick lära känna antikens historia och att han härigenom tagit intryck av främst Aristoteles och Anaximenes vid studiet av materiens egenskaper.

Förf. urskiljer många viktiga steg i vår strävan efter frigörelse från det statiska tvånget. Astronomerna Kopernikus och Kepler samt fysikerna Galilei och Newton hade en enorm betydelse, men världsbilden förblev dock i det väsentliga statisk, grundad på uppfattningen om en absolut tid och ett absolut rum. Upptäckten av lagarna för rörelsers förändring och kroppars ömsesidiga påverkan var dock ett steg i dynamisk riktning. Den självlärde Faraday var ej bunden vid traditionella synsätt och blev därför en av våra stora »åskådningsrevolutionärer», främst genom införandet av kraftfältet som den dynamiska bakgrunden till de elektromagnetiska förloppen. Betydelsen av förändringen, ej det statiska »Ding an sich», underströks ytterligare. I den icke-euklidiska geometrien, relativitetsteorien och atomfysiken har tillvarons dynamik än mer accentuerats.

Den fackligt-fysikaliska framställningen står på en hög nivå, icke minst beträffande skildringen av den moderna fysikens utveckling, vilken givits ett jämförelsevis stort utrymme. Men boken är värdefull även ur humanistisk synpunkt och kan därför bli till stor nytta ej endast vid fysikundervisningen på reallinjen utan även vid orienteringskurserna, då det ju gäller att få kontakt med en huvudsakligen humanistiskt orienterad publik.

»Revolt mot likheten» präglas i hög grad av författarens gripenhet inför sin uppgift. Han följer uppenbarligen sin egen linje, då han vill tvinga oss att se tillvaron på ett sätt som säkerligen är nytt för många människor utanför vetenskapsmännens egna led och få oss att öppna blicken för livets irrationalitet och ovillkorlighet. Den grekiska måttfullheten och likhetspräglade villkorligheten har fört oss vilse.

B. Grundström

M. A. Jaswon, *Studies in Crystal Physics.* Butterworth's Scientific Publications, Pp. 42, 10s. 6d.

Fem uppsatser, av vilka fyra tidigare har varit publicerade i Research, har samlats i detta häfte. De behandlar egenskaper hos det ideala och det defekta kristallgittret, röntgenundersökning av kristalldefekter, martensitiska omvandlingar samt den termodynamiska bakgrunden för dessa saker. Inget väsentligt nytt presenteras, men framställningen är klar och lättläst. Dessa uppsatser riktar sig framför allt till icke-specialister, som vill ha en orientering om några av kristallfysikens problem.

H. U. Åström

R. L. Carroll, *The Aerodynamics of Powered Flight.* Wiley & Sons, New York/London, 1960. Pp. 275, $ 8.50.

Boken grundar sig på författarens kursmaterial från den tid han undervisade provflygare, vilket också går igen i hans presentation av innehållet. Utgående från viss allmän kännedom om praktiskt verkande flygteknik härledes de väsentligaste grundsambanden inom den klassiska flygtekniken med särskild vikt lagd på flygplanaerodynamiken. Härledningarna sker i allmänhet resonerande och förutsätter endast ganska elementär kunskap i matematik och fysik.

Numera finns åtskilliga elementära läroböcker i flygteknik, så att alla smakriktningar torde kunna tillgodoses. Den läsekrets, som kan förväntas ha glädje av denna bok, torde utgöras av dem, som har intresse av och kontakt med praktisk flygteknik och som genom en trevlig och lättläst framställning önskar fördjupa sina flygtekniska kunskaper. *Fritz Hjelte*

W. D. Kingery, *Property Measurements at High Temperatures.* Wiley & Sons, New York/London, 1959. Pp. 416, $ 16.50.

Med höga temperaturer avser författaren temperaturer över 1400° C. Efter tre inledande kapitel om temperaturmätning, högtemperaturmaterial och laboratorieugnar behandlar han i var sitt kapitel värmeledning och strålning, täthet och värmeutvidgning, fasta kroppars mekaniska egenskaper vid hög temperatur och speciellt deras förmåga att utstå hastiga temperaturväxlingar, viskositet, diffusions- och reaktionshastighet, kalorimetri, fasjämvikter, termodynamiska egenskaper, elektriska och magnetiska egenskaper samt ytenergi. I varje kapitel ges först en fysikalisk beskrivning av ämnet ifråga, och viktiga storheter och ekvationer presenteras. Sedan behandlas olika mätmetoder och mätapparater, och slutligen ges en mycket rikhaltig referenslista.

Författarens avsikt med boken har varit att ge en introduktion dels för dem som skall utföra högtemperaturmätningar, dels för dem som skall använda högtemperaturdata. För personer i den senare kategorien ger boken en möjlighet att själva bilda sig en uppfattning om sådana datas tillförlitlighet, vilket författaren anser vara mycket väsentligt eftersom tabellerade värden från högtemperaturmätningar i allmänhet måste betraktas med stor misstänksamhet. Han anser att man själv genom källstudier måste kontrollera hur sådana mätningar utförts, innan man accepterar dem. Bokens styrka ligger för övrigt i den klara dispositionen och i det stora antalet referenser (över tusentalet). Den kan varmt rekommenderas och borde finnas tillgänglig på varje laboratorium där det förefinnes något intresse för höga temperaturer. *Mats Hillert*

Surface Effects on Spacecraft Materials. Editor: Francis J. Clauss. Wiley & Sons, New York/London, 1960. Pp. 404, $ 11.50.

Boken redovisar bidragen från det första symposiet om yteffekter på material för rymdfarkoster anordnat i Palo Alto i Californien den 12–13 maj 1959 av ARDC, U.S. Air Force och Lockheed Aircraft Corp.

De egenskaper som fordras för att möjliggöra temperaturkontroll av rymdfarkosternas ytmaterial och hur dessa reagerar i rymdmiljön genomgås.

Bland de frågor som först belyses finner man beräkningsmetoder för olika ytors erforderliga strålningskarakteristik, erfarenheter av temperaturkontrollsystem på redan avfyrade satelliter och månsonder och metoder för mätning av olika ytors strålningskarakteristik. Därefter behandlas rymdmiljöns inflytande på olika ytmaterial och vissa materialhållfasthetsegenskaper. Till de ämnen som behandlas hör sublimering i ultrahögvakuum, inverkan av högvakuum på mekaniska egenskaper, rymdfarkosters miljöutprovning, friktion och förslitning vid ultrahögvakuum, ultraviolett-strålning i rymden och dess inflytande på organiska ämnen, interplanetarisk fördelning av stoft och därav föranledd yterosion, samt atom- och molekylavstötning.

Trots att boken täcker ett begränsat område inom rymdforskningen uppvisar den en rikhaltig provkarta på föredrag med beskrivningar av många avancerade försöksanordningar och med värdefulla referenser.

John Rosén

Kin N. Tong, *Theory of Mechanical Vibration.* Wiley & Sons, New York/London, 1960. Pp. 348, $ 9.75.

Boken är avsedd som lärobok på högskolestadiet. Den behandlar linjära svängningar i mekaniska system med en, två eller flera frihetsgrader, samt svängningar hos elastiska kroppar.

Den som skriver en lärobok stöter säkerligen på en rad pedagogiska problem, som har att göra med skillnaderna i studiesätt hos olika studenter. Några vill ha en koncentrerad framställning av grundläggande teorier och principer och betraktar utfyllnad med exemplifieringar och åskådningsbilder som besvärliga och tråkiga element, andra anser sådan utfyllnad helt nödvändig för förståelsen av »torra» teorier, och de flesta vill väl ha tillämpningar, men inte för mycket, i framställningen.

Förf. har valt att uppdela kapitlen i två delar, den första behandlar teorier och principer, den andra metoder och tillämpningar. Dessutom avslutas varje kapitel med en extensiv samling övningsuppgifter, dock utan facit. Det förefaller som om denna disposition ger läroboken en form, som kan tillfredsställa olika begåvningsriktningar.

Svängningar i system med en frihetsgrad behandlas huvudsakligen med representation av amplitud och fas genom komplexa tal. Förf. redogör även för vad ett *Nyquist-diagram* innebär. System med flera frihetsgrader behandlas med matrisalgebra, likaså, i viss utsträckning, svängningar hos elastiska kroppar (i ett appendix berörs grunderna för räkning med matriser). Tyvärr har icke någon plats givits för operatorkalkyl eller Laplace-transformation. I boken behandlas även approximativa metoder, såsom Rayleighs, Ritz' och Holzers metoder.

Det nya i denna lärobok torde vara dels den pedagogiska upplägg-ningen och dels den framskjutna plats som givits matrisalgebran.

K. B. Broberg

Crystal Growth, Discussion of the Faraday Society No. 5, 1949. Butterworths Scientific Publications, London, 1959. Pp. 366, 60s.

År 1949 hölls i Bristol en konferens om kristalltillväxt. Bidragen till denna utgavs i bokform, men upplagan är sedan flera år slut. Då man nu tryckt om boken, slumpar det sig så, att den nya upplagan är färdig ungefär samtidigt som rapporten från nästa stora konferens om kristalltillväxt föreligger (se Elementas bokanmälningar juni 1960). Då man studerar de båda verken får man ett klart intryck av att utvecklingen på detta område gått kraftigt framåt under det mellanliggande decenniet. Medan dislokationsteorien, tillämpad på kristalltillväxten, 1949 omfattades huvudsakligen endast av Bristolgruppen, har den nu blivit allmänt accepterad och många fenomen, som tidigare hade ett drag av alkemi över sig, har nu fått en tillfredsställande förklaring.

Innehållet i boken är uppdelat i fyra underavdelningar. I den första diskuteras teorien för kristalltillväxten, varvid tyngdpunkten helt naturligt ligger på den klassiska kärnbildningsteorien. Vid denna tidpunkt fanns ännu alltför många öppna frågor i dislokationsmodellen. I de två följande avdelningarna behandlas kärnbildningens och tillväxtens beroende av temperatur, övermättning, orientering, föroreningar m. m. I det sista avsnittet ges slutligen några tekniska aspekter på bl. a. tillverkningen av stora enkristaller samt beskrivs försök att på syntetisk väg framställa kristaller av mineral.

Man kan tycka, att stoffet i föreliggande bok skulle vara föråldrat och omtryckningen därför omotiverad. Detta är väl till en viss grad sant. Boken innehåller emellertid många uppsatser, som blivit klassiska på sitt område, och många av dess slutsatser består ännu idag. Mycket värdefullt är även den relativt noggranna redogörelsen för de experimentella detaljerna i samband med försöken. Det är därför med tillfredsställelse, som man hälsar denna nytryckning. *H. U. Åström*

GORDON FRANCIS, *Ionization Phenomena in Gases.* Butterworths Scientific Publications, London, 1960. Pp. vii+300, 60s.

Enligt förordet är denna bok »avsedd som ett komplement till de många utmärkta böcker om joniserade gaser som utgivits under senare år». Detta blygsamma uppsåt har författaren velat fullfölja med en bred översikt över ett antal tillämpningsområden, som är nära förknippade med varandra, men som man eljest vanligen får leta efter i spridda källor.

De inledande kapitlen behandlar fundamentalprocesser i ett plasma. Efter ett utmärkt kapitel om likformighetslagar ägnas så följande tillämpningar ett kapitel vardera: högfrekvensurladdningar, jonisation och excitation i den övre atmosfären, starkströmsurladdningar samt plasmaoscillationer och vågor.

Författaren har genomgående lyckats organisera sitt rikhaltiga material på ett lättläst och överskådligt sätt. En nära kontakt uppehålles med litteraturen på området; sammanlagt över 600 referenser är medtagna. Diagrammen är talrika och väl valda. På sina ställen kan det inte hjälpas, att framställningen ger ett intryck av uppräkning, speciellt kanske i kapitlet om starkströmsurladdningar och termonukleära experiment.

Francis' bok är välkommen som en innehållsrik och välskriven introduktion till ett svåröverskådligt forskningsfält. *Sten Herlitz*

D. E. RUTHERFORD, *Fluid Dynamics.* Oliver & Boyd, Edinburgh/London/Interscience Publishers, New York, 1959. Pp. 226, 10s. 6d. net.

Denna bok ger inom sitt begränsade format en god översikt av hydrodynamikens fundament. De olika matematiska modellerna presenteras klart, och deras tillämpning på verkliga vätskors strömning behandlas förtjänstfullt.

I första kapitlet presenteras strömningstekniska grundbegrepp. Rörelseekvationerna och Bernoullis teorem härledes. De närmast följande kapitlen ägnas åt teori för potentialströmning. Här finner man en trevlig framställning av funktionsteoretiska metoder för lösning av tvådimensionella problem. Ekvivalensen mellan strömningsproblem och konforma avbildningar behandlas uttömmande. Framställningen kräver endast ringa förkunskaper i funktionsteori, definitioner samt Cauchy-Riemanns ekvationer. De nödvändiga delarna av teorin för konform avbildning genomgås i ett separat avsnitt. Tredimensionella strömningsproblem behandlas genom direkt lösning av Laplaces ekvation. De enklaste formerna av de erhållna lösningarna tolkas sedan fysikaliskt med hjälp av parallellströmningar, källor, dipoler etc.

I fjärde kapitlet diskuteras kompressibel potentialströmning. Där behandlas bl. a. linearisérad överljudströmning, stötvågor och Prandtl-Meyerströmning. De för framställningen nödvändiga delarna av termodynamiken härledes.

Boken avslutas med ett välskrivet kapitel om viskösa vätskors strömning. Navier-Stokes ekvationer härledes och tillämpas på laminär strömning. I detta kapitel ges även en kvalitativ beskrivning av gränsskiktsteori.

Varje kapitel är försett med ett flertal övningsexempel. — Boken täcker kursen i hydromekanik vid Tekniska Högskolan och kan varmt rekommenderas till användning jämsides med den nuvarande kurslitteraturen. Typografin liksom bildmaterialet är utmärkt.

Karl-Johan Åström

Ceramic Fabrication Processes. Editor: W. D. Kingery. Technology Press and Wiley & Sons, New York, 1958. Pp. 235, $ 9.50.

Kinetics of High-Temperature Processes. Editor: W. D. Kingery. Technology Press and Wiley & Sons, New York, 1959. Pp. 326, $ 13.50.

Den keramiska industrin bygger som bekant på ett mycket gammalt hantverk och arbetar fortfarande i ganska hög grad med metoder som utvecklats på detta tidigare stadium. De vetenskapliga framstegen i modern tid har påverkat denna industri förvånansvärt litet. En av de pionjärer som pläderat för tillämpning av vetenskapliga principer är professor F. H. Norton vid M.I.T. i USA, som med sin klassiska lärobok i ämnet velat lägga en vetenskaplig grund. Det är därför med intresse man tar del av föreliggande två publikationer som båda emanerar från den keramiska avdelningen vid M.I.T. Den ena är en samling föredrag som hållits av 28 experter vid en speciell sommarkurs på M.I.T., den andra innehåller 35 uppsatser med diskussionsinlägg från ett symposium på M.I.T.

I den första boken beskrives den nuvarande tekniken inom den keramiska industrin, med tonvikt på relationen mellan vetenskap och hantverk. Speciellt diskuteras nya principer, och den potentiella betydelsen av pågående utvecklingsarbete analyseras. Som ett exempel kan nämnas de försök som gjorts att utnyttja kontrollerad kärnbildning för omvandling av glasformigt material till keramiskt, vilket skulle kunna möjliggöra en ny metod för tillverkning av keramiska material.

Hos de nya viktiga keramiska material, som framkommit, t. ex. ferriter och ferroelektriska material, är egenskaperna i hög grad beroende av mikrostrukturen, och en rad föredrag ägnas åt denna sak. Mikroskopet, som så länge varit metallografens viktigaste redskap, verkar bli oumbärlig även för den keramiske materialexperten.

Den andra boken är inte direkt begränsad till keramik men lägger huvudvikten vid icke-metalliska material. Den syftar att kombinera de resultat som erhållits inom olika områden, även metallområdet, för att nå en ökad förståelse för det fysikaliska skeendet vid olika processer, såsom diffusion, kärnbildning, korntillväxt, sintring, fasomvandling och kemisk reaktion mellan olika faser. Den imponerande mängd fakta och idéer, som här läggs fram och diskuteras, är i första hand av akademiskt intresse men visar att en mycket snabb utveckling pågår, vilken lovar praktiska resultat i en nära framtid.

Mats Hillert

A. F. Gibson et al (Ed.), *Progress in Semiconductors.* Heywood & Co., London. Vol. 3, 1958. Pp. 210, 55s. net. Vol. 4, 1960. Pp. 291, 63s. net.

Nu föreligger ytterligare två band i den serie av översiktsartiklar inom halvledarområdet, vars första två delar recenserades i Elementa *41*, 1958, 3. De förhoppningar, som då kunde fästas vid fortsättningen, infrias till fullo. Artiklarna har skrivits av en utökad krets av ledande forskare och ger i flertalet fall värdefulla överblickar av viktiga avsnitt. Ämnesområdet har vidgats mot bl. a. halvledarkemi och dielektrika.

I del 3 må särskilt framhävas en uppsats om magnetoresistivitet i germanium och kisel samt en intressant exposé över de raffinerade metoder, som utvecklats för kemisk rening av samma ämnen. De teoretiskt och praktiskt intressanta elektroniska processerna i kadmiumsulfid presenteras också utförligt.

I del 4 behandlas bl. a. laddningsbärare med negativa effektiva massor, lavineffekt och inre fältemission, brus i halvledare och gitterstörningarnas elektriska effekter. Till slut diskuteras icke-kristallina, amorfa och flytande elektroniska halvledare.

Uppsatserna är utmärkta och några av artiklarna torde vara av stort intresse för var och en, som vill studera halvledarmaterialen. Serien kan varmt rekommenderas.

Dick Lundqvist

Semiconductor Abstracts, Vol. V, Issue 1957. Editor: C. S. Peet. Wiley & Sons, New York/London, 1960. Pp. 449, $ 12.00.

Som rubriken anger ingår denna bok i en serie böcker med litteraturreferenser inom halvledarområdet. Man har nu hunnit fram till 1957 års publikationer. Eftersom denna del av facklitteraturen har expanderat mycket snabbt, har omfånget ökat från år till år. Volym V omfattar sålunda 1705 litteraturreferenser uppdelade under fyra huvudrubriker: Enkla halvledare, Sammansatta halvledare, Teori och Allmänna tillämpningar.

Boken riktar sig främst till fysiker och ingenjörer, som arbetar inom halvledarfysiken och är av stort värde, när det gäller att snabbt söka litteraturreferenser inom olika speciella områden. Den är försedd med såväl författar- som sakregister. Tyvärr ligger 1957 tre år tillbaka i utvecklingen, men i förordet utlovas kommande volymer i snabbare takt. Man får vara Electrochemical Society, Inc., tacksam för att de satsat pengar på boken för att bringa ordning och överblick över den digra halvledarlitteraturen. *G. Markesjö*

E. M. Grabbe/S. Ramo/D. E. Wooldridge, (Editors), *Handbook of Automation, Computation and Control*, Wiley & Sons, New York/ Chapman & Hall, London, 1959. Pp. ca 1000, $ 17.50.

Behovet av komplicerade matematiska beräkningar för forskning, utveckling och produktion ökar ständigt. De moderna matematikmaskinerna ger oss möjligheter att lösa sådana problem som för mindre än tjugo år sedan ansågs praktiskt olösbara.

I det nu föreliggande andra bandet »Computers and Data Processing» av denna handbok redovisas på ett föredömligt sätt våra möjligheter och metoder just nu att utnyttja digital- och analogimaskiner för att fylla detta beräkningsbehov.

Boken är uppdelad i följande huvudavdelningar: A. Terminologi; B. Programmering av digitalmaskiner med beskrivningar av ett tiotal välkända maskiner. Automatisk programmering behandlas utförligt; C. Användning av digital- och databehandlingsmaskiner, uppbyggnad av system och beskrivning av utrustningar för olika ändamål, behandling av icke-numerisk information; D. Konstruktion av digitalmaskiner med beskrivningar av grundelementet och anpassningsenheter; E. Konstruktion och användning av analogimaskiner, även innehållande något om digital-differential-analysatorn; F. »Ovanliga» computersystem.

Det är förvånansvärt att så mycket vetande kunnat pressas in så välordnat i en volym av normalt »handboksformat». Avvägningen mellan digital- och analogidelarnas omfång förefaller vara god. Det hade dock varit värdefullt, om skalningsproblemen vid analogiberäkningar belysts ytterligare något.

Utvecklingen på matematikmaskinområdet går mycket snabbt. De båda räknemetoder som i denna bok ställts mot varandra och fått samsas om utrymmet är i själva verket komplement till varandra. Inom en nära framtid kommer man ganska säkert att utnyttja bådas fördelar i olika hybridmaskiner, vilket även handboken ger antydningar om. *Bertil Mårtensson*

ALAN R. KATRITZKY/JEANNE M. LAGOWSKI, *Heterocyclic Chemistry.* Methuen & Co., London/Wiley & Sons, New York, 1960. Pp. 274, 21 s. net.

Författarnas avsikt har varit dels att ge en enhetlig framställning av den heterocykliska kemien baserad på modern elektronteori, dels att genom komprimerad stil och förenklad typografi hålla priset så lågt, att boken verkligen kan nå det avsedda klientelet, studenter och yngre forskare, som specialiserat sig på organisk kemi.

Enhetligheten uppnås genom att framställning och reaktioner av alla likartade ringsystem behandlas gemensamt, varvid likheterna betonas och förklaras. På de 270 sidorna har samlats ett mycket stort material av fakta, systematiskt ordnat och lätt tillgängligt genom ett detaljerat sakregister. De enskilda föreningarna beskrivs endast mycket kortfattat, vilket givetvis är riktigt i en bok av denna karaktär, och viktiga naturprodukter omnämns bara som representanter för de ingående heterocykliska systemen. Texten är klar men synnerligen kortfattad, vilket i förening med den enformiga typografien gör boken ganska svårläst. Härtill bidrar också, att den elektronteoretiska rationaliseringen av olika reaktionssätt inte alls genomförts i den utsträckning, som varit möjlig och ur pedagogisk synpunkt önskvärd. Så till exempel förklaras inte de typiska skillnader i reaktivitet, som uppträder, då ytterligare kväveatomer förs in i 5- och 6-lediga ringar. Värdena på resonansenergierna är felaktiga för många ämnen, och ett avsevärt antal tryckfel tyder på att boken färdigställts i stor hast.

Bokens förtjänster ligger i att den på ett begränsat utrymme ger en sammanställning av ett stort antal framställningsmetoder för heterocykliska föreningar liksom en fyllig översikt över deras sätt att reagera med de viktigaste nukleofila och elektrofila reagensen. I den löpande texten får man endast ett fåtal referenser till särskilt viktiga eller nya litteraturställen, men i gengäld får man i inledningen en värdefull samling referenser till översiktsartiklar på området.

Som introduktion till heterocyklisk kemi är boken inte helt lämplig, men som referensverk bör den kunna vara av stort värde.

Jan Sandström

HENRI GUERIN, *La grande industrie chimique de base.* Collection Armand Colin nr 339, Paris, 1959. 211 p., NF 4,50.

En läsvärd, koncentrerad redogörelse för jordens naturtillgångar, för fabrikationsmetoder och ekonomisk betydelse beträffande storkemikalier: svavels, kväves och fosfors föreningar, elektrokemiska och elektrotermiska industrier. Många schematiska figurer och belysande tabeller. Teorier och formler helt kortfattat. *Bertil Englund*

PRYTZ/ØSTERUD, *Uorganisk kjemi.* 2. utg. Grøndahl & Søn, Oslo, 1959. 456 s., nkr. 54: —.

Denna bok utarbetades under ockupationen, då författarna inte hade tillgång till nyutkommen litteratur, och vissa defekter i 1:a upplagan 1946 får så sin förklaring. I den nya upplagan har vissa avsnitt omarbetats. En mycket grundlig revision med hänsyn till forskningens resultat hade dock varit behövlig.

Bokens stora pedagogiska förtjänst är, att kemiska egenskaper redovisas med utgångspunkt från den kemiska bindningens natur. På så sätt får det periodiska systemet en utmärkt behandling; också problem inom bigrupperna kan belysas instruktivt. En god översikt över syra-bas-frågan ges, där också mediets vätskestruktur avhandlas. Tekniska metoder och praktiska användningar behandlas vederhäftigt. — Innehållet i boken är emellertid mycket ojämnt till kvaliteten. Svårigheten att frigöra ett resonemang från äldre tänkesätt — vilket författarna talar om i förordet — gör sig alltför ofta märkbar. Att exempelvis härleda uttrycket för löslighetsprodukt genom spekulationer över en gipslösning med fast bottensubstans är dubbelt olyckligt: dels finns inte molekyler $CaSO_4$ i lösningen, dels är den fasta fasen inte $CaSO_4$. Beskrivningen av järn- och kopparsulfatkristallers byggnad som komplexföreningar är ett annat exempel på sådan eftersläpning i åsikter. Mycket anmärkningsvärt finner jag det vara, att jongitter beskrivs i en underavdelning till kapitlet »Molekylbegreppet».

Ibland är framställningen pedagogiskt vilseledande. Detta gäller t. ex. definitionerna på ekvivalentvikt och »neutralområde» (mellan pH-värdena 4 och 10!?) samt jämförelsen mellan ättiksyras och vattens styrka som syror (pk=4,75 och pK=14 är inte analoga). Full konsekvens vid skrivande av reaktionsformler är det som bekant svårt att uppnå. I detta arbete finner man reaktionsformler efter flera olika system, bl. a. partialreaktioner. Reaktionen mellan koppar och salpetersyra beskrivs vid behandlingen av normalpotentialer på modernt sätt med formler för två elektrodförlopp, varvid Cu^{++}-joner uppstår, men vid den systematiska behandlingen av salpetersyra uppges bestämt i ord och formel, att CuO uppstår! För oxidation av kromjon till kromatjon lämnas en helt felaktig reaktionsformel. Helhetsbilden av en innehållsrik och värdefull bok grumlas av många skönhetsfel.

Bertil Englund

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

2283) Vilken är den största gemensamma divisorn till talen $N=n^{10}+n^6-2n^2$, då n genomlöper alla heltalsvärden? *X.*

2284) I triangeln ABC tangerar den inskrivna cirkeln sidorna BC, CA och AB i resp. A_1, B_1 och C_1. Om l, m och n betecknar längderna B_1C_1, C_1A_1 och A_1B_1, så är $(m^2+n^2):h_a+(n^2+l^2):h_b+(l^2+m^2):h_c=6r$.
V. Thébault

2285) På linjen l ligger punkterna O, A och B i denna ordning och $OB>3OA$. Att på normalen mot l i O konstruera punkten P, så att a) vinkeln OAP blir tre gånger så stor som vinkeln OBP b) vinkeln OPB tre gånger så stor som vinkeln OPA. *X.*

Enklare matematiska uppgifter[2]

2286) Bestäm två tal, vilkas summa, skillnad, produkt och kvot i denna ordning bildar en aritmetisk serie.

Svar: $-1{,}125$ och $-0{,}6$.

2287) Lös ekvationen $(1-\sin 2x):(1-\cos 2x)=\operatorname{tg} x$.

Svar: $26{,}565^\circ+n\cdot 180^\circ$.

2288) Två cirklar med radierna 3 och 10 cm tangerar varandra utantill i punkten A. Bestäm på tangenten i A en punkt P, så att övriga tangenter som drages från P med varandra bildar rät vinkel.

Svar: AP är 2 cm eller 15 cm.

2289) Genom P (0; 1) drages en korda AB i parabeln $2y=x^2$. Bestäm höjden mot hypotenusan i den triangel, vars kateter utgöres av PA och PB.

Svar: 1 längdenhet.

2290) I en triangel har en sida längden a. Samma längd har en annan sidas projektion på den tredje. Sök maximum för triangelytan.

Svar: $\frac{3}{8}a^2\sqrt{3}$ ytenh.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérgat. 33, Stockholm NO.

[2] Uppg. 2286—2290, 2292—2293 är insända av *S.B.*, 2291, 2294—2296 av *X.*

2291) I vilka likbenta trianglar ABC med $AB=AC$ är $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B$ ett minimum?

Svar: Basvinkeln 64,09°. Höjden mot sidan AB delar denna enl. »gyllene snittet».

2292) Bestäm den yta som inneslutes av kurvorna $y=x^3$ och $y=x^2+2x$.

Svar: $3\frac{1}{12}$ ytenh.

2293) Räta linjen $y=x+1$ tangerar kurvan $y=x^2+ax+2$. Bestäm konstanten a. Beräkna ytan av det slutna området, som bildas av tangenten och de mot a-värdena svarande kurvorna.

Svar: $a_1=3$; $a_2=-1$; ytan är $\frac{2}{3}$ ytenh.

2294) I kvadraten $ABCD$ kan man alltid draga en rät linje genom A, som skär diagonalen BD i F, sidan BC i G och förlängningen av sidan DC i H så, att trianglarna AFB och GCH får lika ytor. Visa, att $AF \cdot AG=HG^2$ och $FG \cdot FH=AF^2$.

Anm. Tillskrives Archimedes enligt arabisk källa. Likheterna gäller, även om $ABCD$ är en parallellogram.

2295) (x, y, z) är ett positivt lösningssystem till $x^2=y^2+z^2$, $xz=y^2$, $yz=1$. Beräkna x^4-2y^4 och y^4-z^4.

Svar: Båda uttrycken har värdet 1.

2296) Man har två serier cirklar a_1, a_2, ... och b_1, b_2, ... I a_n är diametern $\frac{1}{4}n$ längdenheter, hos b_n är ytan n motsvarande ytenheter. Vilka a_n och b_n är närmast ytlika?

Svar: $n=20$.

2297) Undersök, hur antalet normaler till kurvan $2y=(x-1)^2$ från en punkt P på y-axeln varierar, när P genomlöper nämnda axel.

Svar: Om p är P:s ordinata, gäller för områdena $p>2{,}5$, $p=2{,}5$ och $p<2{,}5$ resp. 3, 2 och 1 normaler.

Lösningar till uppg. 2256—2258

2256) Den parabel, som i en likbent triangel tangerar de lika sidorna i basens ändpunkter, går genom de punkter på triangelns in- och vid dess bas vidskrivna cirklar, som har maximiavstånd från figurens symmetriaxel. *X.*

Vertex ligger i höjdens mittpunkt M och fokus i den omskrivna cirkelns medelpunkt O. Är I den inskrivna cirkelns medelpunkt, blir

enligt Euler $OI^2=R^2-2Rr$. Den punkt på inskrivna cirkeln som har maximiavståndet från axeln är P. Då blir $OP=R-r$. Av $MO=R-\frac{1}{2}h$ och $MI=\frac{1}{2}h-r$ fås, att P:s avstånd till styrlinjen också är $R-r$. Är Q centrum för den vid basen vidskrivna cirkeln, är $QO^2=R^2+2Rr_a$ och $OP_1=R+r_a$, där P_1 har maximiavstånd. Avståndet från P_1 till styrlinjen är även $R+r_a$. *S. B.*

Även löst av *Sb, A. Ruhe* och *Sn.*

2257) I en tetraeder med sidoytorna A, B, C och D finnes en punkt P så belägen att de fyra plan som lägges genom P parallellt med var sin sidoyta utskär likytiga trianglar i tetraedern. Bestäm en sådan triangelyta. *V. Thébault*

Om x är den sökta ytan, h_1 höjden mot A och n_1 avståndet mellan x och A, erhålles $\sqrt{x}:\sqrt{A}=(h_1-n_1):h_1=1-n_1:h_1=1-n_1A:3V$, där V är volymen. Tre likartade ekvationer för de andra ytorna erhålles. Addition ger $\Sigma(\sqrt{x}:\sqrt{A})=4-\Sigma n_1A:3V=3$, ty $\Sigma n_1A:3=V$. Till sist blir $\sqrt{x}=3:\Sigma(1:\sqrt{A})$. *Sb.*

2258) Sök orten för brännpunkterna till ett kägelsnitt med givet centrum och två givna tangenter. *X.*

1. Lägg ett axelsystem med origo O i tangenternas skärningspunkt och x-axeln som bisektris till tangentvinkeln. Enligt Poncelet bildar tangenterna lika vinklar med var sin brännpunktsradie eller supplementvinklar i ett av hyperbelfallen. Om C $(a;\ b)$ är det givna centrum och F $(x;\ y)$ en fokus, blir den andra F_0 $(2a-x;\ 2b-y)$. Uttrycken för OF:s och OF_0:s riktningskoefficienter blir $y:x$ och $(2b-y):(2a-x)$ och ortens ekvation $y:x+(2b-y):(2a-x)=0$ eller $xy=bx+ay$, en liksidig hyperbel med asymptoterna $x=a$ och $y=b$. Sönderfall för $ab=0$. *Sb.*

2. Kägelsnitten är inskrivna i den parallellogram, som bildas av tangenterna T, t samt deras spegelbilder T_1, t_1 i centrum O. Om normalerna mot $(T,\ T_1)$ och $(t,\ t_1)$ genom en brännpunkt F råkar dessa i resp. M, M_1, N, N_1, så karakteriseras F av $FM\cdot FM_1=FN\cdot FN_1$. Detta ger som ort den kring parallellogrammen omskrivna liksidiga hyperbeln. Tages nämligen parallellerna med T och t genom O som axlar, återgår villkoret på $(x-a)(x+a)=(y-b)(y+b)$, dvs. $x^2-y^2=a^2-b^2$, när sidorna är $2a$ och $2b$. *X.*

Även löst av *Sn.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen

November 1960

Matematiska uppgifter[1]

Reallinjens matematiska gren

1. Konstruera kurvan $y=\frac{x^3-2x}{x^2-3}$ i dess huvuddrag, och ange eventuella maximi- och minimipunkter samt asymptoter.
2. Bisektrisen till vinkeln A i triangeln ABC delar sidan BC i förhållandet 3:4. Vinkeln B är 60° större än vinkeln C. Beräkna triangelns vinklar.
3. En rät cirkulär kons basdiameter är lika med dess höjd. Konens höjd är också diameter i ett klot. Hur stor del av konens volym ligger inom klotet?
4. I funktionen $y=a\cdot e^{-bx^2}$ är $a=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ och $b=\frac{1}{2\sigma^2}$, där σ är en konstant. Visa, att $x=\sigma$ är ett nollställe till $\frac{d^2y}{dx^2}$. — Det förutsättes som bekant, att $\frac{de^x}{dx}=e^x$.
5. P är en punkt på en given parabel. En cirkel tangerar parabelns axel, brännpunktsradien till P samt den del av diametern genom P, som ligger inom parabeln. Bestäm geometriska orten för cirkelns medelpunkt.
6. Kurvan $y=\sin x$ ersättes i intervallet $0\leqq x\leqq\pi$ approximativt med den parabel $y=ax^2+bx+c$, som går genom maximipunkten och skärningspunkterna med x-axeln för den ifrågavarande delen av sinuskurvan. Om man använder denna approximation vid beräkning av den yta, som begränsas av x-axeln och den nämnda delen

[1] Enligt gymnasiereformen av år 1953, som tillämpas vid studentexamen fr. o. m. v. t. 1957.

av sinuskurvan, vilket blir förhållandet mellan det begångna felet och det korrekta värdet?

7. Ytan av ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ är π ytenheter. Ange ellipsens excentricitet som funktion av längden av halvaxeln a, bestäm denna funktions definitionsområde, och åskådliggör funktionen grafiskt.

8. Upprita kurvan $y=\frac{1}{1+x^2}$ i dess huvuddrag. Denna kurva, x-axeln samt linjerna $x=a$ och $x=\frac{1}{a}$, där a är ett godtyckligt tal mellan 0 och 1, begränsar ett ändligt område. Bevisa, att detta område delas mitt itu av linjen $x=1$.

Resultat: **1.** Kurvan har asymptoterna $y=x$ och $x=\pm\sqrt{3}$. Origo är centrum. Max. i $(-\sqrt{6};\ -\frac{4}{3}\sqrt{6})$ och $(1;\ \frac{1}{2})$, min. i $(\sqrt{6};\ \frac{4}{3}\sqrt{6})$ och $(-1;\ -\frac{1}{2})$. **2.** $A=27{,}80°$; $B=106{,}10°$; $C=46{,}10°$. **3.** $\frac{18}{25}=0{,}72$. **5.** Om den givna parabelns ekv. är $y^2=4ax$, är orten parabeln $y^2=a(x-a)$ med undantag av toppen. **6.** Exakta och approx. värdena är resp. 2 och $\frac{2}{3}\pi$ ytenh., varav förh. 0,0472. **7.** Om de positiva, olika talen a och b förutsätter lydelsen endast $ab=1$, ej $a>b$. Därför två fall. 1) För $a>1$ är $e=\sqrt{1-1:a^4}$, som växer från gränsmin. 0 för $a=1$ till gränsmax. 1, när $a\to+\infty$. 2) För $a<1$ är $e=\sqrt{1-a^4}$, som avtar från gränsmax. 1 för $a=0$ till gränsmin. 0 för $a=1$.

Reallinjens biologiska gren

1. $F(x)$ är en hel rationell funktion av tredje graden, så beskaffad, att $F(0)=F'(0)=2$ och $F(2)=F'(2)=0$. Bestäm $F(x)$, och upprita kurvan $y=F(x)$ i dess huvuddrag.
2. Av det kol, som ingår i en levande organism, utgöres en viss, konstant bråkdel av den radioaktiva kolisotopen C^{14}. Från och med den tidpunkt, då organismen dör, avtar mängden av C^{14} enligt lagen för radioaktivt sönderfall, $m_t=m_0e^{-\lambda t}$, där m_0 är den mängd C^{14}, som fanns vid den tidpunkt, då organismen dog, och m_t är den mängd, som finns kvar t år efter den nämnda tidpunkten. Genom mätning av koncentrationen kvarvarande C^{14} kan man beräkna storheten t. En dylik mätning visade, att mängden C^{14} i ett preparat utgjorde 32 % av vad den skulle ha varit, om organismen hade levat. För hur många år sedan dog organismen? Halveringstiden för C^{14} är 5600 år, dvs. efter denna tid är endast hälften kvar av den ursprungliga mängden.
3. Bestäm konstanten a så, att kurvorna $y=ax^2+2{,}5$ och $y=x^2$ skär varandra under räta vinklar. Beräkna därefter ytan av det ändliga område, som begränsas av de båda kurvorna.

4. Punkterna P och Q på kurvan $y=x^3$ har x-koordinaterna 1 resp. $1+\triangle x$. Riktningskoefficienterna för sekanten PQ och tangenten i P är k_1 resp. k_2. Vilket är det största möjliga värdet på $|k_1-k_2|$, om $|\triangle x|\leqq 0{,}01$?
5. I en konvergent oändlig geometrisk serie är kvoten k och första termen $(1-k^2)^2$. Bestäm seriens summa som funktion av kvoten. Ange definitionsområdet och eventuella maxima och minima för denna funktion, samt åskådliggör den slutligen i ett diagram.
6. I en regelbunden fyrsidig pyramid är sidokanten dubbelt så stor som baskanten. Ett av basytans hörn sammanbindes med mittpunkten på den motstående sidokanten. Visa, att den vinkel, som sammanbindningslinjen bildar med basytan, är exakt lika stor som vinkeln mellan två motstående sidokanter.
7. Ett parallelltrapets $ABCD$, där AB är den större av de parallella sidorna, har hörnet A i punkten (9; 2) och hörnet B i punkten (3; 5). Hörnet C ligger på y-axeln och hörnet D på x-axeln. Undersök, inom vilket område på y-axeln punkten C kan ligga, och bestäm ekvationen för sidan CD, när trapetsets yta är så stor som möjligt.
8. En rät cirkulär kon har lika stor begränsningsyta som en given sfär. Bestäm förhållandet mellan konens och sfärens volymer, när konens volym är så stor som möjligt.

Resultat: **1.** $F(x)=(x-2)^2(x+\frac{1}{2})$ med min. i (2; 0) och max. i $(\frac{1}{3}; \frac{125}{54})$. **2.** För 9200 år sedan. **3.** $a=-\frac{1}{9}$; ytan 5 ytenh. **4.** Max. 0,0301 för $\triangle x=0{,}01$. **5.** Summan är $(1+k)^2(1-k)$ för $-1<k<1$. Funktionen växer från gränsmin. 0 för $k=-1$ till max. $\frac{32}{27}$ för $k=\frac{1}{3}$ och avtar sedan mot gränsmin. 0, då $k\to 1$. **7.** CD:s ekv. är $2x+4y-7=0$ och $0<y_C<3$. **8.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Allmänna linjens sociala gren

1. Ett kapital på 10 000 kr växer med ränta på ränta under 20 år. Om räntesatsen (räntefoten) är 3 % under de 10 första åren och 4 % under de följande 10 åren, till vilket belopp uppgår behållningen vid tjugoårsperiodens slut? Hur stort hade beloppet blivit, om räntesatsen i stället hela tiden hade varit 3,5 %?
5. I en regelbunden fyrsidig pyramid är sidokanten dubbelt så stor som baskanten. Ett av basytans hörn sammanbindes med mittpunkten på den motstående sidokanten. Beräkna dels den vinkel, som sammanbindningslinjen bildar med basytan, dels vinkeln mellan två motstående sidokanter.

Uppg. 2–4 och 6–8 se biologisk gren 1–5 och 7.

Resultat: **1.** 19 890 resp. 19 900 kr. **5.** Båda vinklarna är 41,41°.

Matematiska uppgifter för latin- och realgymnasiet

Enl. 1933 års stadga

Latingymnasiet

1. Se social gren 1.
2. I den likbenta triangeln ABC är BC basen och BD en höjd. Längderna av sträckorna BD, BC och BA bildar en geometrisk serie. Beräkna triangelns vinklar.
3. I en likbent triangel är de lika stora sidorna vardera 17 cm och basen 16 cm. I triangeln inskrives en cirkel, och en tangent till cirkeln drages parallellt med basen. I den avskurna topptriangeln inskrives en cirkel, och parallellt med basen drages en tangent till denna. Konstruktionen upprepas i oändlighet. Beräkna förhållandet mellan summan av alla dessa cirklars ytor och den ursprungliga triangelns yta.
4. I det egentliga bråket $\frac{a}{b}$, där alltså $b>a$, adderas det positiva hela talet m till både täljare och nämnare. Bevisa, att bråket därigenom alltid blir större.
5. Ett parallelltrapets $ABCD$ är inskrivet i en cirkel. Den större av de parallella sidorna AD är 6 cm. Sidorna AB och DC utdrages, så att de råkas i en punkt E. Sträckan BE är 2 cm, och ytan av triangeln BEC är en åttondel av parallelltrapetsets yta. Beräkna cirkelns radie.
6. Rektangeln $ABCD$ är uppritad på ett papper; sidorna AB och BC är 6 cm respektive 16 cm. Punkten E är mittpunkt på BC, och sammanbindningslinjen AE skär diagonalen BD i punkten F. Papperet vikes utefter BD, varvid punkten A faller i en punkt G. Beräkna vinkeln EFG.
7. Kvoten i en konvergent oändlig geometrisk serie är x. Skillnaden mellan seriens första och andra termer är $(x+\frac{2}{3})(x-\frac{1}{3})(1-x)^2$. Ange seriens summa som funktion av x, och åskådliggör den grafiskt. Bestäm därefter med hjälp av diagrammet eller på annat sätt det minsta värde, som seriesumman kan anta.
8. Bisektrisen till en vinkel i en triangel bildar 60° vinkel med den motstående sidan och delar denna i delarna a och b, där $a>b$. Härled ett uttryck för bisektrisens längd i så enkel form som möjligt och endast innehållande storheterna a och b.

Resultat: **2.** $A=53{,}13°$, $B=C=63{,}435°$. **3.** $15\pi:68\approx 0{,}693:1$. **4.** Visa, att skillnaden mellan det nya bråket och det ursprungliga blir positiv. **5.** $\frac{2}{3}\sqrt{21}$ cm $\approx 3{,}055$ cm. **6.** 65,15°. **7.** Summan $=(x+\frac{2}{3})(x-\frac{1}{3})$ för $-1<x<1$ med min. $-\frac{1}{4}$ för $x=-\frac{1}{6}$. **8.** $ab:(a-b)$.

Realgymnasiet. Allmän kurs

2. I en triangel ABC är vinkeln A tre gånger så stor som vinkeln B. Bisektrisen CD till vinkeln C skär sidan AB i punkten D. Ytan av triangeln ACD är $\frac{3}{5}$ av ytan av triangeln ABC. Beräkna vinklarna i triangeln ABC.
3. Bestäm konstanten a så, att kurvorna $y=ax^2+2{,}5$ och $y=x^2$ skär varandra under räta vinklar. Beräkna därefter ytan av den fyrhörning, som bildas av tangenterna i kurvornas skärningspunkter.
6. Mellan vinklarna i en triangel ABC gäller sambandet $\sin^2 B = \cos(A-B)\cos C$. Bevisa, att vinkeln A är rät.
8. Ett använt uppskuret brevkuvert kan sägas bestå av ett rektangulärt dubbelt blad $ABCD$, där CD betecknar den uppskurna långsidan, vars mittpunkt på de båda bladen betecknas med E och E'. Kortsidan AD väljes som längdenhet. Genom att föra punkterna E och E' så långt isär som möjligt, så att punkterna C och D sammanfaller, kan man av kuvertet under vissa omständigheter bilda en tetraeder $ABEE'$. Ange, vilka värden längden x av sträckan DE kan anta. Bestäm tetraederns volym som funktion av x, och undersök denna funktion med avseende på maxima och minima. Åskådliggör slutligen funktionen grafiskt.

Uppg. 1, 4, 5, 7 se biol. gren 1, 5, 7, 8.

Resultat: 2. $A=113{,}28°$, $B=37{,}76°$, $C=28{,}96°$. 3. $a=-\frac{1}{9}$; ytan 7,5 ytenh. 8. Om volymen är V volymsenh., är $V=\frac{2}{3}x^2\sqrt{1-x^2}$ med villkoret $<x<1$, då kuvertet skärs upp längs långsidan. V växer från $\frac{1}{12}\sqrt{3}$ för $x=\frac{1}{2}$ till max. $\frac{4}{27}\sqrt{3}$ för $x=\frac{1}{3}\sqrt{6}$ och avtar därefter mot gränsmin. 0 för $x=1$.

Realgymnasiet. Specialkurs

1. Av två givna koncentriska cirklar har den ena dubbelt så stor yta som den andra. Två radier OA och OB i den större cirkeln skär den mindre cirkeln i punkterna C och D och bildar med varandra en spetsig vinkel v. Uttryck som funktion av v ytan av den figur $ABDC$, som begränsas av kordan AB, cirkelbågen CD samt delarna AC och BD av radierna. Bestäm därefter v, så att den nämnda ytan blir så stor som möjligt.
2. Den liksidiga hyperbeln $xy=a$, där a är en konstant, är given. På hyperbeln ligger två punkter P och Q, som inte är symmetriskt belägna med avseende på origo. Mittpunkten på sträckan PQ sammanbindes med origo. Visa, att denna sammanbindningslinje och linjen PQ bildar lika stora vinklar med hyperbelns asymptoter.

3. Upprita kurvan $y=2x-\frac{1}{x^2}$ i dess huvuddrag. Tangenten i en punkt P på kurvan skär den sneda asymptoten i punkten A och kurvan i punkten B. Visa, att $AP:PB=1:3$.
4. Tangenterna till en ellips i parametrarnas ändpunkter bildar en fyrsiding. Bestäm ellipsens excentricitet så, att ellipsen upptar så stor del som möjligt av fyrsidingens yta. Ange i detta fall excentriciteten och ifrågavarande ytförhållande i såväl exakt som approximativ form.
5. I en likbent triangel ABC har de lika sidorna AB och AC konstant längd, medan vinkeln A varierar. En kvadrat inskrives i triangeln, så att en sida faller utefter basen. Bestäm vinkeln A, när kvadratens sida är så stor som möjligt.
6. Två parabler har gemensam brännpunkt i origo. Den ena har parametern $4a$ och vertex på negativa x-axeln, den andra har parametern $4b$ och vertex på positiva x-axeln. En tangent till den ena parabeln är vinkelrät mot en tangent till den andra parabeln. Bestäm orten för de båda tangenternas skärningspunkt. Undersök speciellt dess läge i förhållande till de båda parablernas skärningspunkter.
7. En rätvinklig triangels hörn ligger i punkterna $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$ och $(1;\ 0)$. Genom punkten $(0;\ b)$, där $0<b<1$, drages en rät linje med sådan riktningskoefficient (vinkelkoefficient) k, att den skär kateterna i punkterna A och B. Dessa punkters projektioner på x-axeln utgöres av punkterna C respektive D. Då b är konstant och k varierar, är ytan av parallelltrapetset $ABDC$ en funktion av k. Denna funktion har sitt största värde $=M$ för $k=K\geqq 0$. Undersök och åskådliggör i två skilda diagram, hur M beror av b och hur K beror av b.

Resultat: **1.** Om r är den större cirkelns radie, är ytan $=\frac{1}{2}r^2(\sin v-\frac{1}{2}v)$ med max. för $v=\frac{1}{3}\pi$. **3.** Inflex. asymp. $y=2x$, spetsasymp. $x=0$, max. i $(-1;\ -3)$. **4.** $e=\frac{1}{2}\sqrt{2}\approx 0{,}7071$; förh. $\frac{1}{4}\pi=0{,}7854$. **5.** $A=76{,}88°$ $(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=1/\sqrt[3]{2})$. **6.** Den genom parablernas skärningspunkter gående linjen $x=b-a$ med undantag av de inom parablerna liggande punkterna. **7.** För $0\leqq b<\frac{1}{2}$ gäller $M=2b(1-b)$ och $K=0$; för $\frac{1}{2}\leqq b<1$ gäller $M=\frac{1}{2}$ och $K=\sqrt{2b-1}$.

Uppgifter i fysik

1. En kropp, som väger 12 kg, drages med en konstant horisontell kraft av 4,0 kp längs en sträv horisontell yta, varvid friktionskoefficienten är 0,28. Beräkna hur stor del av det på kroppen utförda arbetet, som omvandlats till rörelseenergi hos kroppen.

2. Ett bombplan, som flyger horisontellt med en hastighet av 600 km/tim, fäller en bomb. Denna träffar marken under 45° vinkel. Beräkna planets höjd i det ögonblick bomben fälles. Luftmotståndet försummas. Som värde på tyngdkraftens acceleration får användas värdet 9,8 m/sek^2.
3. På ett strävt horisontellt plan lägges två likadana sträva homogena cirkulära cylindrar, så att deras mantelytor berör varandra längs en generatris i hela dess längd. Ovanpå dem placeras en likadan cylinder, som alltså kommer att tangera var och en av de förra längs en generatris i hela dess längd. På grund av friktionen är cylindrarna i jämvikt. Friktionskoefficienten har ett och samma värde μ_1 vid beröringslinjerna mellan cylindrarna, medan den har ett annat värde μ_2 i beröringslinjerna med horisontalplanet. Beräkna det minsta värde μ_1 respektive μ_2 får ha, om jämvikt skall vara möjlig. Figur kräves. I denna skall angivas de krafter, som utnyttjas vid lösningen.
4. En elektrisk destillationsapparat skall konstrueras, så att 2,0 liter vatten kan destilleras per timme. Man räknar med att det tillförda vattnet har temperaturen 12° C och att ångbildningen sker vid 100°. Vilken resistans skall motståndstråden i apparatens värmespiral ha, om den skall anslutas till nätspänningen 220 volt och om verkningsgraden är 90 %, dvs. om 90 % av den tillförda elektriska energin verkligen utnyttjas för uppvärmning av vattnet och för ångbildningen?
5. Man önskade med en avläsningskikare bestämma vridningen hos den lilla planspegeln på en spegelgalvanometer. Kikaren var därför försedd med en starkt belyst millimeterskala, som placerats omedelbart under objektivet, vinkelrätt mot kikarens längdaxel. Spegeln, som stod vinkelrätt mot samma axel, befann sig på avståndet 200 cm från objektivet. Då kikaren är så inställd, att man med ett normalt öga utan ackommodation tydligt kan med kikaren se ett avlägset föremål, är avståndet mellan objektiv och okular 35 cm. Brännvidderna hos objektiv och okular förhåller sig som 6 : 1. Hur mycket måste okularet förskjutas, för att ett normalt öga utan ackommodation tydligt skall kunna se en bild av skalan i kikaren? Figur med enkel strålgång erfordras.
6. Man önskar bestämma emk och inre resistans hos ett torrbatteri med relativt stor inre resistans. Till batteriets poler anslutes en voltmeter med mycket stor resistans och parallellt med voltmetern ett motstånd med resistansen 10 ohm. Voltmetern visar då 4,0 V. Om ännu ett motstånd med resistansen 10 ohm anslutes till batteriets poler, visar voltmetern 3,6 V. Beräkna emk och inre resistans hos batteriet. Kopplingsschema erfordras.

Praktisk realexamen vt. och ht. 1960: Uppgifter för maskinteknisk linje i beskrivande maskin- och byggnadslära (150, 299).

Under rubriken »Aktuellt»:

För astronomilärare att beakta (35); Svenska Kemistsamfundets Berzeliusdagar (36); Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, årsmöte jan. 1960 (37); Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, möten nov. 1959 och april 1960 (38, 115); Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, möten nov. 1959, febr. 1960, okt. 1960 (39, 115, 266); Fjerde LMFK-kongress i Oslo (40); OEEC-kurser sommaren 1960 (41); Internationell rymdforskarkongress i Stockholm (41); Nordiskt samarbete på skolfronten — ett uppslag (113); Internationell konferens om undervisningen i fysik (190); Givande LMFK-kongress i Oslo (193); Atomreaktorkurs för lärare i Studsvik (196); Engelsk-svenska sciencekurser i Sigtuna och Oxford (197); Fysikdagar för gymnasieelever (267).

Lund 1960, Håkan Ohlssons Boktryckeri

7. En strömkälla, ett skjutmotstånd, en amperemeter samt ett motstånd R med fast resistans kopplas i serie, så att man får en sluten ledning. Parallellt med R kopplas en elektrolysapparat. Med en voltmeter med mycket stor resistans mätes spänningen över elektrolysapparaten. Omedelbart efter det att strömmen slutits, visar voltmetern V_1 volt och amperemetern I ampere. Strömmen sjunker emellertid snabbt. Genom att ändra på skjutmotståndet kan man emellertid återfå den ursprungliga strömstyrkan I ampere. På voltmetern avläses då V_2 volt. Strömmen brytes. Omedelbart därefter visar voltmetern V_3 volt. Visa att $V_3 = V_2 - V_1$. Kopplingsschema erfordras.
8. Vid en klyvningsprocess, som kan inträffa, då en kärna hos uranisotopen ^{235}U absorberat en neutron, frigöres i vissa fall två neutroner med en medelenergi av vardera 2 MeV (millioner elektronvolt). För att en kedjereaktion skall kunna inledas och vidmakthållas, måste energin hos var och en av dessa neutroner nedbringas till 0,025 eV. Man får då s. k. termiska neutroner. Detta åstadkommes genom att neutronerna får kollidera med atomerna i en moderator (tungt vatten eller grafit). Bestäm neutronernas medelhastighet före och efter dessa kollisioner. En elektron har laddningen $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ coulomb. Neutronens massa är $1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg.

Resultat: **1.** 16 %. **2.** 1400 m. **3.** $\mu_1 = 2 - \sqrt{3}$; $\mu_2 = \frac{1}{3}\mu_1$. **4.** 30 ohm. **5.** 2,4 cm. **6.** 4,5 volt, 1,25 ohm. **8.** $1{,}97 \cdot 10^7$ m/s resp. $2{,}19 \cdot 10^3$ m/s.

Realexamen h. t. 1960

I. Provräkning i realexamen

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 10x = 2{,}9y + 5{,}5 \\ 0{,}1y = 3x - 5{,}5 \end{cases}$
2. Vinklarna i en triangel förhåller sig som 3 : 5 : 7. Vilken vinkel bildar bisektrisen till triangelns största vinkel med höjden mot den minsta sidan?
3. En specerifirma gjorde med anledning av ett jubileum ett reklamerbjudande. Varje kund, som en viss dag köpte tre burkar kaffe à 500 g för tillsammans 15 kr 90 öre, det ordinarie priset, skulle gratis få en burk à 250 g av samma sorts kaffe. Hur många procents rabatt kan detta erbjudande sägas motsvara? Samma pris per kilogram antas gälla för båda förpackningarna.
4. Lös ekvationen $\dfrac{5\frac{1}{3}}{2{,}5x^2 - 10} = \dfrac{2}{3x + 6} + \dfrac{2}{5x - 10}$

5. I det likbenta parallelltrapetset $ABCD$ är de parallella sidorna AB och CD 4,2 cm respektive 8,4 cm. Trapetsets diagonaler skär varandra i O, så att vinkeln AOB är 60°. Hur lång är var och en av trapetsets icke parallella sidor?
6. I ett halvklot av trä med radien 5 cm göres en cylindrisk urborrning vinkelrätt mot halvklotets plana yta. Det cylindriska borrhålets radie är 3 cm, och dess axel går genom medelpunkten i halvklotets plana yta. Hur stor del av halvklotets volym kan högst borras bort, innan borrhålet når fram till halvklotets buktiga yta?
7. Då en bil av visst märke köres på högsta växeln, är utväxlingen mellan motoraxeln och bakaxeln $1 : 4\frac{1}{3}$, dvs. motoraxeln måste göra $4\frac{1}{3}$ varv, för att bakhjulen skall göra ett varv. Med vilken hastighet i km/tim kör bilen på högsta växeln, då motoraxelns varvtal är 3000 per min? Bakhjulens yttre diameter är $26\frac{1}{2}''$. $1'' = 2\frac{1}{2}$ cm. Som närmevärde på π användes $3\frac{1}{7}$.
8. Basen i en likbent triangel är 14 cm. En cirkel med 3 cm radie har sin medelpunkt i basens mittpunkt och tangerar triangelns lika stora sidor. Hur många procent av triangelns yta utgör den del, som ligger utanför cirkeln? Som närmevärde på π användes 3,14.

Resultat: **1.** $x=2$, $y=5$. **2.** 48°. **3.** 14,3 % ($14\frac{2}{7}$ %). **4.** $x=2\frac{1}{2}$. **5.** 11,1 cm ($4{,}2\sqrt{7}$ cm). **6.** 43,2 %. **7.** 83 km/tim ($26{,}5\pi$ km/tim). **8.** 39,2 %.

II. Provräkning i realexamen, avkortad kurs

1. Satisfieras ekvationen $\dfrac{x}{1\frac{2}{3}-2x}-\dfrac{\frac{1}{3}-x}{x}=\dfrac{1}{9x}$ av $x=\frac{1}{3}$?
2. En person köper en post aktier i ett industribolag för 1350 kr per styck. Nominella värdet är 1000 kr per aktie. Hur många procents ränta får han på sitt i dessa aktier nedlagda kapital ett år, då bolagets utdelning är 90 kr per aktie?
4. En person vill genom inköp av $4\frac{1}{2}$ % obligationer efter $96\frac{1}{2}$ % kurs skaffa sig en årsränta av 1800 kr. Hur stort kapital måste han disponera för inköp av de härför erforderliga obligationerna?
5. En tävlingscyklist startar kl. 8.00 från en ort A och anländer kl. 9.30 till vändpunkten B, som ligger 50 km från A. När kan han väntas till målet i A, om hastigheten bibehålles oförändrad, tills 10 km återstår, då den ökas med 20 %?
7. Arbetarna inom ett visst fack hade före första världskrigets början 40 kr i veckan med 11 arbetstimmar dagligen och vid krigets slut

100 kr i veckan med 8 arbetstimmar dagligen. Med hur många procent hade dessa arbetares timpenning ökats under kriget?

Uppg. 3, 6, 8 se uppg. 1, 3, 7 i provräkning I.

Resultat: 1. Ja, båda leden ger vid prövning $\frac{1}{3}$. 2. $6\frac{2}{3}$ %. 4. 38 600 kr. 5. Kl. 10.57. 7. $243\frac{3}{4}$ %.

III. Provräkning för huslig linje utgjordes av uppg. 1, 3, 7 i provräkning I, uppg. 1, 2, 5, 7 i provräkning II och uppg. 1 i provräkning IV.

IV. Provräkning för maskinteknisk linje

2. Under den heta månaden augusti 1959 förbrukades ett dygn 431 miljoner liter vatten i Stockholm. Om denna vattenmängd vore innesluten i en stor klotformig droppe, hur stor diameter skulle denna ha?
4. En rätvinklig parallellepiped med baskanterna 1 cm har samma totala begränsningsyta, 49,78 cm², som en kub. Beräkna förhållandet mellan kubens och parallellepipedens volymer.
8. En liksidig kon med höjden 8 cm placeras med spetsen nedåt och axeln vertikalt. Konen fylles med vatten till $\frac{3}{4}$ av sin höjd. Ett klot med radien 2 cm nedsänkes i vattnet. Hur mycket kommer vätskeytan därvid att stiga?

Uppg. 1, 3, 5–7 se uppg. 2, 4, 6–8 i provräkning I.

Resultat: 2. 93,72 m. 4. 2,00:1. 8. 7,8 mm.

V. Beskrivande maskin- och byggnadslära för maskinteknisk linje

1. En stång med kvadratiskt tvärsnitt är utsatt för en dragkraft av 4 Mp. Stången fasthålles i sin ena ände medelst en genomgående kil, vars tjocklek är $^1/_4$ av kvadratens sida. Beräkna stångens tvärsnitt så, att påkänningen i det försvagade snittet blir 500 kp/cm².
2. En balk INP 30 är fritt upplagd på två stöd på 5 m avstånd från varandra. Balken har på mitten en punktbelastning av 4 Mp. Beräkna böjpåkänningen med hänsyn tagen till balkens egenvikt.
3. Beräkna vridpåkänningen i en ihålig axel med 300 mm yttre och 200 mm inre diameter, om vridande momentet är 5 Mpm.
4. En elmotor med varvtalet 1200 r/m driver lintrumman, D=600 mm, till en hiss över en kuggväxel med utväxlingsförhållandet 4:1 och en skruvväxel med utväxlingsförhållandet 20:1. Hur stor last kan lyftas, om motorn avger 10 hk, och hissens totala verkningsgrad är 65 %?
5. En encylindrig, enkelverkande, 4-takts dieselmotor har 240 mm cylinderdiameter och 380 mm slaglängd samt gör 200 r/m. Genom indikering bestämmes medelövertrycket till 7,88 kp/cm². Diesel-

motorn är direkt kopplad till en elgenerator, som avger 15 kW. Beräkna generatorns verkningsgrad och bortse därvid från motorns mekaniska förluster.

6. I en skruvväxel har skruvhjulet 60 kuggar och skruven 3 ingångar. Skruvaxelns moment skall vara 7000 kpcm vid totalverkningsgraden 0,85. Hur stort vridmoment erfordras på skruven?
7. För vattenuppfordring tages elektrisk energi, alstrad av vattenkraft, från en annan plats. Pumpens uppfordringshöjd = turbinens fallhöjd. Pumpens verkningsgrad är 50 %, turbinens 75 % och den elektriska överföringen 80 %. Sök förhållandet mellan den av turbinen använda vattenmängden och den av pumpen uppfordrade.
8. Med en remväxel skall en effekt av 12 hk överföras. Man tänker sig, att för remskivan på motoraxeln, som gör 400 r/m, kan olika diametrar komma i fråga motsvarande periferihastigheter på remmen mellan 5 och 20 m/s.

   a) Upprita ett diagram som visar hur periferikraften varierar med diametern inom nämnda hastighetsområde.
   b) Avläs ur diagrammet periferikraften för $D = 600$ mm.

Resultat: **1.** 33×33 mm. **2.** 790 kp/cm². **3.** 118 kp/cm². **4.** 1035 kp. **5.** 0,68. **6.** 411 kpcm. **7.** 1 : 0,30. **8.** b) 72 kp.

Fyrtiotredje årgångens innehåll
1960

Andersson, S. Föreningen i Lund för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, möten i nov. 1959 och april 1960 ..... 38, 115

Augustinsson, K. B. Anm. av Harrison, A Guide-Book to Biochemistry 152

Aurell, B. En rörelselag härledd med hjälp av komplexa tal 90

Aurivillius, B. Anm. av Faith, Air Pollution Control 132

Bengtsson, T. A. Anm. av Pecsok, Principles and Practice of Gas Chromatography 66

Bergendal, G. Anm. av Julia, Éléments d'algèbre (202), Garnier, Cours de mathématiques générales (203).

Bergvall, P. Anm. av Wannier, Elements of Solid State Theory 204

Berndt, S. Anm. av Etkin, Dynamics of Flight—Stability and Control 58

Bjellerup, L. Anm. av Widequist, Laboratorieteknik (135), Elvers, Kemiska grunder för livet och kulturen (226).

Bladh, E. Komplexometrisk titrering 153

Blom, G. Om spelteori och beslutsteori 229

— Anm. av Henrysson, Elementär statistik (44), Wiener, Nonlinear Problems in Random Theory (48), Burger, Einführung in die Theorie der Spiele (49), Sasieni/Yaspan/Friedman, Operations Research: Methods and Problems (120), Metzger, Elementary Mathematical Programming (120), Saaty, Mathematical Methods of Operations Research (120), Duncan, Quality Control and Industrial Statistics (121), Fisher, Statistical Methods and Scientific Inference (200), Guilbaud, What is Cybernetics? (202), Acton, Analysis of Straight-Line Data (203), Kac, Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory (270).

Borg, D. Engelsk-svenska science-kurser i Sigtuna och Oxford 197

Boström, K. Anm. av Zumberge, Elements of Geology (64), Dapples, Basic Geology for Science and Engineering (64).

Brinck, I. Anm. av Håstad/Schwarz/Schwarz, Tentamensproblem med lösningar för B i matematik 44

Broberg, K. B. Anm. av Tong, Theory of Mechanical Vibration 279
Båth, M. Geofysik och månforskning 15
— Anm. av Howell, Introduction to Geophysics 62
Calais, J. L. Anm. av Fano/Fano, Basic Physics of Atoms and Molecules 54
Carlström, D. Anm. av Onsley, Biophysical Science — A Study Program 208
Dahlin, E. Anm. av Slaymaker, Mechanical Design and Analysis 131
Drougge, G. Anm. av Kuethe/Schetzer, Foundations of Aerodynamics 212
Eklöf, O. Anm. av Westerlund, Astronomi 67
Englund, B. Halvmikroanalys på gymnasiet 33
— Oxidation av metanol till formaldehyd 110
— Demonstration av surhets-skalan 112
— Anm. av Seel, Atombau und chemische Bindung (214), Guerin, La grande industrie chimique de base (285), Prytz/Østerud, Uorganisk kjemi (286).
Fischmeister, H. Anm. av Doremus/Roberts/Turnbull, Growth and Perfection of Crystals 127
Fröberg, C. E. Anm. av Levens, Nomography (50), On Numerical Approximation (119).
Grundström, B. Fysik, filosofi och humanism 91
— Anm. av Lindberg, Från skapelsetro till naturlagar (117), Corlin, Revolt mot likheten (275).
Gustaver, B. Nordiskt samarbete på skolfronten — ett uppslag 113
Hanner, O. Anm. av Godement, Théorie des faisceaux 47
Helde, M. Strålrisker och strålskydd 167
Hemer, O. Anm. av Gelfond, The Solution of Equations in Integers 271
Herlitz, S. Anm. av Francis, Ionization Phenomena in Gases 281
Hilding, S. Anm. av Helton, Introducing Mathematics 45
Hillert, M. Anm. av High Temperature Materials (126), Anm. av Kingery, Property Measurements at High Temperatures (278), Ceramic Fabrication Processes (282), Kinetics of High-Temperature Processes (282).
Hjalmars, S. Anm. av Lawden, A Course in Applied Mathematics 269
Hjelte, F. Anm. av Carroll, The Aerodynamics of Powered Flight 278
Hoffman, R. Anm. av Pople/Schneider/Bernstein, High-resolution Nuclear Magnetic Resonance 123
Håstad, M. Anm. av Hyltén-Cavallius/Sandgren, Matematisk analys II 43
Hägg, G. Namnen väte, kväve och syre 24
— Höger och vänster i död och levande materia..... 249
Häggmark, P. Västsvenska föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, möten i nov. 1959, febr. 1960 och okt. 1960 .... 39, 115, 266
Jönsson, T. Astronautisk information — några reflexioner 29
— Internationell rymdforskarkongress i Stockholm 41
Karlsson, E. Anm. av Segré, Experimental Nuclear Physics 207

Kihlborg, L. Anm. av Kordes, Optische Daten zur Bestimmung anorganischer Substanzen mit dem Polarisations-Mikroskop 215
Kjellberg, G. Anm. av Fröberg, Numerisk analys 199
Knave, E. OEEC-kurser sommaren 1960 41
Kristiansson, K. Anm. av Spring, Photons and Electrons 209
Lamm, B. Anm. av Wiberg, Laboratory Technique in Organic Chemistry .. 213
Larsson-Leander, G. Anm. av Kopal, Close Binary Systems (125), Wilkens, Moon Maps (271), Pecker/Schatzman, Astrophysique générale (272).
Leine, P. O. Anm. av Solid State Magnetic and Dielectric Devices 59
Linde, J. O. Anm. av Cusack, The Electrical and Magnetic Properties of Solids (53), Atkins, Liquid Helium (55), Mendelssohn, Progress in Cryogenics (55).
Lindstedt, G. Anm. av Freudenberg/Plieninger, Organische Chemie 66
Ljunghall, A. Anm. av Kosmos Bd 37 116
Lundqvist, D. Anm. av Gibson et al, Progress in Semiconductors 283
Lönnqvist, C. Anm. av Thernøe, Raketter, satellitter og drabanter (210), Troebst, Språnget mot månen (210), Hall, Satelliter och rymdfärder (210).
Magnéli, A. Anm. av Jensen, Almen Kemi 135
Markesjö, G. Anm. av Lurch, Fundamentals of Electronics (205), Semiconductor Abstracts Vol. 5 (283).
Mårtensson, B. Anm. av Zeines, Servomechanism Fundamentals (129), Grabbe et al, Handbook of Automation, Computation and Control (284).
Nilsson, S. B. Anm. av Svantesson, Foundations of Thermodynamics .. 56
Nydahl, F. Anm. av Helferich, Ionenaustauscher 65
Odhnoff, J. Anm. av Schwartz, étude des sommes d'exponentielles (46), Weil, Introduction à l'étude des variétés kählériennes (48).
Odqvist, F. Anm. av Crandall, Random Vibration (212), Lindsay, Mechanical Radiation (273), Fracture (274).
Petersson, J. Anm. av Tricomi, Fonctions hypergéométriques..... 201
Raab, L. Anm. av Hutchinson, A Treatise on Limnology 133
Renander, T. Halvmikroanalys på gymnasiet 188
Riesel, H. Vad är automatisk kodning? 97
— En rörelselag härledd med hjälp av komplexa tal 188
— Anm. av Tietze, Gelöste und ungelöste matematische Probleme aus alter und neuer Zeit (121), Mechanisation of Thought Processes (198), Ralston/Wilf, Mathematical Methods for Digital Computers (268).
Rosén, J. Anm. av Surface Effects on Spacecraft Materials 279
Råde, L. Anm. av Wylie, Advanced Engineering Mathematics (201), Rose, A Modern Introduction to College Mathematics (270).
Sandin, L. Anm. av Van Wylen, Thermodynamics 206

Sandström, J. Anm. av Katritzky/Lagowski, Heterocyclic Chemistry 285
Sihlbom, L. Nylonframställning som lektionsförsök 111
Simonsson, A. Ett problem om permutationer 183
Skjulstad, T. Fjerde LMFK-kongress i Oslo 40
Slätis, H. Upptäckten av antiprotonen. Nobelpriset i fysik 1959 1
— Anm. av Elton, Introductory Nuclear Theory 50
Staffansson, E. Internationell konferens om undervisningen i fysik 190
— Anm. av Champion/Davy, Properties of Matter (51), Pitchford, Studies in Geometrical Optics (122).
Starck, G. Svenska Kemistsamfundets Berzeliusdagar 36
— Luftens halt av syre 108
— Reaktionen $2\,SO_2 + O_2 \rightleftarrows SO_3$ 109
— Förenklade försök med jonbytare 189
— Viktstitrering 263
Stål, I. Fotografiska försök som kan utföras i dagsljus 262
Svennerstedt, S. Anm. av Brown, Basic Data of Plasma Physics 56
Svenonius, B. Anm. av Wallenquist, Nytt ljus över kosmiska gåtor (67), Karta över Norra stjärnhimlen (209).
Svensson, I. Anm. av Glas, Elektroniska hjälpmedel 57
Thunqvist, D. Anm. av Seshu/Balabanian, Linear Network Analysis (60), Newstead, General Circuit Theory (61), Wagner, Analytical Transients (211).
Unenge, J. Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, årsmöte jan. 1960 37
— Givande LMFK-kongress i Oslo 193
— Atomreaktorkurs för lärare i Studsvik 196
— Fysikdagar för gymnasieelever 267
Wahlgren, A. Anm. av Niven/Zuckerman, An Introduction to the Theory of Numbers 269
Wilner, T. Försök med växelfält 11
Zetterberg, L. H. Anm. av Haus/Adler, Circuit Theory of Linear Noisy Networks (61), Nordiskt symposium över användning av matematikmaskiner (118), Smullin/Haus, Noise in Electron Devices (130).
Åström, H. U. Anm. av Neugebauer/Newkirk/Vermileya, Structures and Properties of Thin Films (214), Jaswon, Studies in Crystal Physics (277), Crystal Growth (280).
Åström, K. J. Anm. av Rutherford, Fluid Dynamics 281
Ölander, A. Den polarografiska analysmetoden. Nobelpriset i kemi 1959 81

Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 70, 136, 216, 287
Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentskrivningar och fyllnadsprövningar 1960: jan. (73), mars (139), aug. (219), nov. (290).
Provräkning i realexamen vt. och ht. 1960 ..... 147, 297

ATT STUDERA MATEMATIK

En introduktion av

HARALD BERGSTRÖM

15:75

Avsikten med denna introduktion i högre matematiska studier är i första hand att underlätta övergången från gymnasiet till den friare studieformen vid universiteten och de tekniska högskolorna.

Huvudsyftet med boken är sålunda att införa läsaren i en mera avancerad matematisk begreppsbildning och med utgångspunkt därifrån presentera några av de centrala avsnitten inom den högre matematikundervisningen.

Matematiken spelar ju en allt större roll i både vetenskapliga och praktiskt ekonomiska sammanhang i vårt moderna, av tekniken präglade samhälle. Professor Bergströms bok utgör en första inledning i denna viktiga nyckelvetenskap. Men författaren har inte bara sinne för det "nyttiga" i den vetenskap han företräder, hans bok har också mycket att ge dem som fängslas av matematiken som grundvetenskap "för sin egen skull".

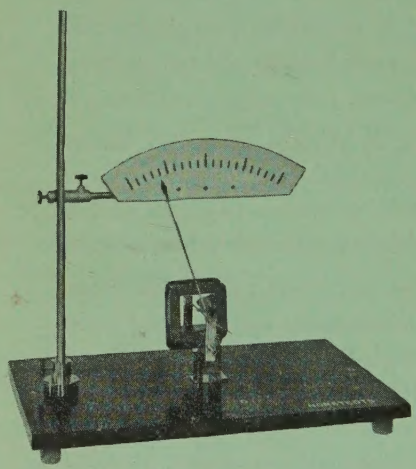
I ett kortfattat appendix till boken lämnas praktiska upplysningar om högskolestudierna i matematik.

B
F
SCANDINAVIAN UNIVERSITY BOOKS
SVENSKA BOKFÖRLAGET

NORSTEDTS presenterar... F 765

Ny experimentsats i fysik avsedd för demonstrationsförsök i

värmelära
mekanik
dynamik
akustik
och
ellära



vridjärnsinstrument

Uppbyggnadsprincipen är densamma som vid de tidigare byggsatserna, men dimensionerna är kraftigt förstorade — bottenplattan är t.ex. 52 × 32 cm och U-kärnan med ankare väger 5 kg!

NORSTEDTS SKOLAVDELNING
STOCKHOLM

Lund 1960, Håkan Ohlssons Boktryckeri